از آثار مؤلف که بچاپ رسیده

زمین شناسی	برای سال سوم دبیرستان
دوره تشریح انسان الوان	چاپ دوم در ۱۰ قطعه
دورهٔ نباتات »	در ۱۲ قطعه
دوره فسیل شناسی	در ۳ قطعه
عهود چهارگانه الوان	در یک قطعه
طبقات الارض	»
نقشه هیئت و آسمان الوان	در ۲ قطعه
فورمول ریاضی برای سال پنجم و ششم علمی	چاپ دوم

آنچه در زیر چاپ است

دورهٔ حیوانات	در ۱۰ قطعه
دوره سنگ شناسی	» ۴ قطعه
دوره میکرب شناسی	» قطعه

۶- فرع - اجسام بواسطهٔ سطوح قابل انقسامند

۷ - تعریف - سطح را ممکن است محدود یا نامحدود تصور کرد در صورت اول حد سطح را خط گویند (میتوان خط را حد فاصل یا فصل مشترک بین دو سطح نیز تصور نمود)

۸ - فرع - سطوح بواسطهٔ خطوط قابل انقسامند

۹ - تعریف - حد فاصل دو خط یا مطلقا حد خط را نقطه گویند

۱۰ - فرع - برای تحدید خط دو نقطه کفایت میکند

۱۱ - فرع - خطوط بواسطهٔ نقاط قابل انقسامند

۱۲ - تعریف - حجم و سطح و خط و نقطه را مطلقا شکل گویند

۱۳ - فضا دارای سه بعد است که عموماً به کلمهٔ طول . عرض . عمق تعبیر میشود پس میتوان فهمید که در اشکال هندسی

اولاً - حجم مشتمل بر سه بعد است و در اجسام مادی ابعاد ثلثه بر حسب مقام اسامی مختلف دارند

سؤالات - ۱- اسامی سه بعد اطاق چیست - ۲- سه بعد دیوار چه نام دارند

۳- سه بعد حوض را اسم ببرند

ثانیاً - سطح شامل دو بعد است که عموماً آنها را طول و عرض گویند

سؤال ۱ - دو بعد کف اطاق چه نام دارد؟ - ۲ - دو بعد دیوار اطاق چیست؟

ثالثاً - خط یک بعد بیش ندارد که آنرا عموماً طول نامند؟

سؤال ۱ - بعد اطول میز چه نام دارد؟ - ۲ - اسم بعد اقصر میز چیست؟ - ۳ - فاصلهٔ ما بین سقف وکف اطاق چه نام دارد؟ - ۴ - کلمه که مشترکاً جواب این هر سه سؤال باشد چیست؟ (طول)

رابعاً - نقطه دارای هیچیک از ابعاد نیست و بنابراین نقطه فضا نیست موهوم

ب - تولید اشکال بواسطهٔ حرکت

۱۴ - هرگاه نقطه در فضا تغییر مکان دهد معبر سیر آنرا خط گویند و بعبارة اخری خط شکلی است که از حرکت نقطه در فضا تولید میشود

سؤال ۱ - شکلی که از حرکت نوک مداد یا قلم (وقتی ابعاد جسم فوق العاده کوچک باشد آنرا بطور مسامحه نقطه گوئیم) بر صفحهٔ کاغذ تولید میشود چیست؟ - ۲ - وقتی نوک سوزنی را روی گلولهٔ بکشیم چه شکلی تولید میشود

۱۵ - فرع - چون نقطه دارای ابعاد نیست معبر حرکتش بیش از یک بعد (طول) ندارد

۱۶ - هرگاه خط در جهتی غیر از طول خود تغییر مکان دهد معبرش سطح است

سؤال ۱ - وقتی میوه را با چاقو میبریم معبر کارد چاقو (خط) چیست؟ - ۲ - وقتی با اره چوبی را میبریم از حرکت دندانه های اره (خط) چه شکلی تولید میشود

۱۷ـ فرع ـ چون خط که مولد سطح است یک بعد دارد سطح شامل دو بعد میشود

۱۸ـ هرگاه یک قطعه سطح در جهتی غیر از طول و عرض خود حرکت کند معبرش

حجم است

سؤال ـ اگر صفحهٔ تختهٔ را در جسمی نرم بفشار داخل نمائیم چه شکلی تولید میشود

۱۹ـ فرع ـ چون سطح که مولد حجمست دو بعد دارد حجم دارای ابعاد ثلثه میگردد

۲۰ـ از حرکت جسم مجدداً جسم (حجم) تولید میگردد

مثلاً وقتیکه میخ بدیوار میکوبیم جای آن حجم است یا وقتی چندین کتاب را روی

یکدیگر می چینیم حجمی جدید حاصل میشود

۲۱ـ نتیجه ـ (از نمرهٔ ۱ تا ۲۰) از آنچه مذکور شد معلوم میشود که اشکال فضائی

منحصر در چهار نوع است حجم . سطح . خط . نقطه

۲۲ـ تعریف ـ علمی که موضوعش تحقیق و بحث در خواص و وضع و صورت و

وسعت اشکال مزبور است بعلم هندسه موسوم گردیده است (کلمهٔ هندسه

معرب اندازه است)

ج ـ خط مستقیم و سطح مستوی

۲۳ـ تعریف ـ هرگاه نقطه در حین حرکت جهة حرکت خود را ابداً تغییر ندهد

معبرآن را خط مستقیم یا بالاختصار مستقیم گویند

× میتوان مستقیم را بطریق ذیل نیز تعریف نمود

× هرگاه برخطی دو نقطه فرض شود و چنان تصور کنیم که خط حول این دو نقطه دوران کند (مانند نخ ممتدی که تابیده شود) اگر از این حرکت برای خط تغییر مکان حاصل نشود آنرا مستقیم نامند

۲۴ – **فرع** – خط مستقیم از طرفین نامحدود است

۲۵ – **فرع** – مابین دو نقطه بیش از یک مستقیم وجود ندارد و بنابراین خط مستقیم بواسطهٔ دو نقطه خود کاملاً مشخص میگردد

× ۲۶ – **فرع** – اگر دو مستقیم دو نقطهٔ مشترک داشته باشد منطبق و مشتبه شده یک مستقیم میشوند

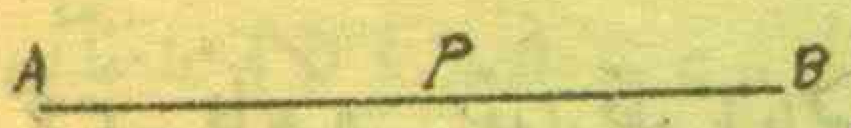
× ۲۷ – **نتیجه ۱** – دو مستقیم متمایز نمیتوانند بیش از یک نقطهٔ مشترک داشته باشند و در اینصورت آنها را متقاطع گوئیم

۲۸ – **نتیجه ۲** – بریک نقطه ممکن است عدهٔ بیشماری خطوط مستقیم مرور داد

۲۹ – **قرارداد** – نقطه را با یکی از حروف الفبا تعیین میکنند و برای متابعت جمهور ما نیز الفبای کتابی و بزرگ لاتین را بجهت این مقصود اختیار کرده‌ایم –

موافق این قرارداد خط مستقیم بوسیلهٔ دو حرف مشخص میگردد

۳۰ – **تعریف** – هرگاه نقطهٔ متحرک P (شکل ۱) بر خطی مستقیم از A تا B حرکت کند گویند این نقطه خط AB را پیموده



واگر بالعکس از B تا A حرکت نماید گویند نقطهٔ P خط را در جهة BA طی کرد

شکل ۱

و دو جهة AB و BA را مخالف یکدیگر گوئیم

۳۱ – هرگاه سطح میز و سطح کرهٔ جغرافی را مثلاً با یکدیگر بسنجیم فوراً آنهارا مختلف می یابیم واز اینجا دو نوع سطح تشخیص میدهیم

۳۲ – **تعریف ا** – سطح مستوی – یا صفحه سطحی است که چون نقطه باختیار در آن فرض نموده بر آن نقطه خطوط مستقیم بیشمار مرور دهیم جمیع آنها بکلی در سطح مفروض واقع شوند

۳۳ – **تعریف** – اشکال مستویه اشکالی هستند که جمیع اجزایشان در یکسطح مستوی واقع است وقسمتی از هندسه که درباب این قسم اشکال است بمسطحات یا هندسهٔ مسطحه موسوم شد

د – جمع و تفریق قطعات

۳۴ – **تعریف** – خط شعاعی مستقیمی است که از یکطرف محدود و با نقطهٔ

آن را مبداء شعاع نامیم

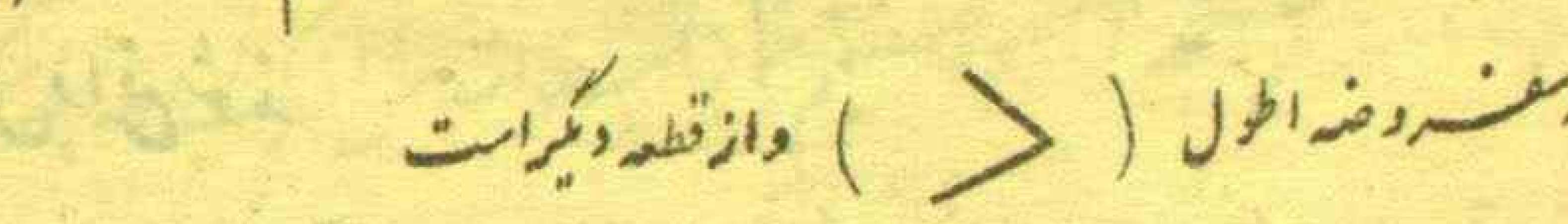
۳۵ ـ **تعریف** ـ قطعهٔ مستقیم یا بالاختصار قطعه مستقیمی است که از طرفین محدود باشد یکی از دو طرف را مبداء و دیگری را منتهای قطعه خوانیم

۳۶ ـ **فایده** ـ مقدار قطعه یا فاصلهٔ دو انتهای آن عبارت است از طول قطعه که با واحد طول سنجیده میشود و معمولاً قطعه را یا بواسطهٔ دو حرف مبداء و منتها، که همواره حرف مبداء را مقدم میداریم و یا بواسطهٔ یکحرف کوچک مکتوبی لاتین تعیین میکنیم (در صورت اخیر منظور اندازه عددی قطعه مقصود است)

۳۷ ـ **تعریف** ـ دو قطعه را متساوی گوئیم در صورتیکه اگر یکی را بر دیگری چنان منطبق نمائیم که مبداء بر مبداء واقع شود منتها نیز بر منتها منطبق گردد و یا بالعکس

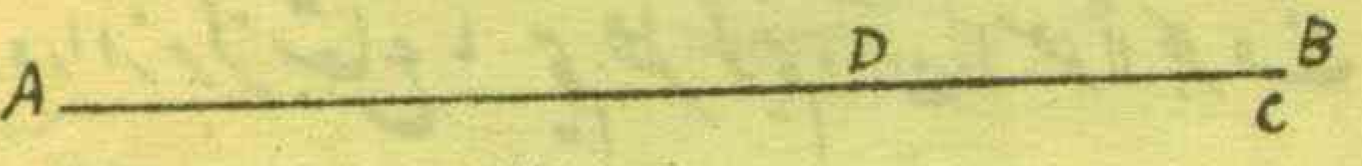
سؤال ـ در چه صورت قطعه را اقصر (>) از قطعهٔ دیگر گوئیم ـ ۲ ـ در چه صورت قطعه مفروضه اطول (<) و از قطعه دیگر است

۳۸ ـ **تعریف** ـ هرگاه قطعه A B را از راس B به بعد باندازهٔ قطعه دیگر C D امتداد دهیم گویند قطعه C D بر قطعه A B افزوده شده و قطعهٔ



AD را مجموع نامند $AB + BD = AD$

۳۹ – **تعریف** – اگر بفرض اینکه $AB < CD$ باشد قطعهٔ CD را بر قطعه AB چنان منطبق کنیم که مبداء CD بر منتهای AB واقع شود گویند قطعه CD از قطعهٔ AB تفریق شده و قطعهٔ AB - CD یا AD را تفاضل دو قطعه گویند



$AB - CD = AD$

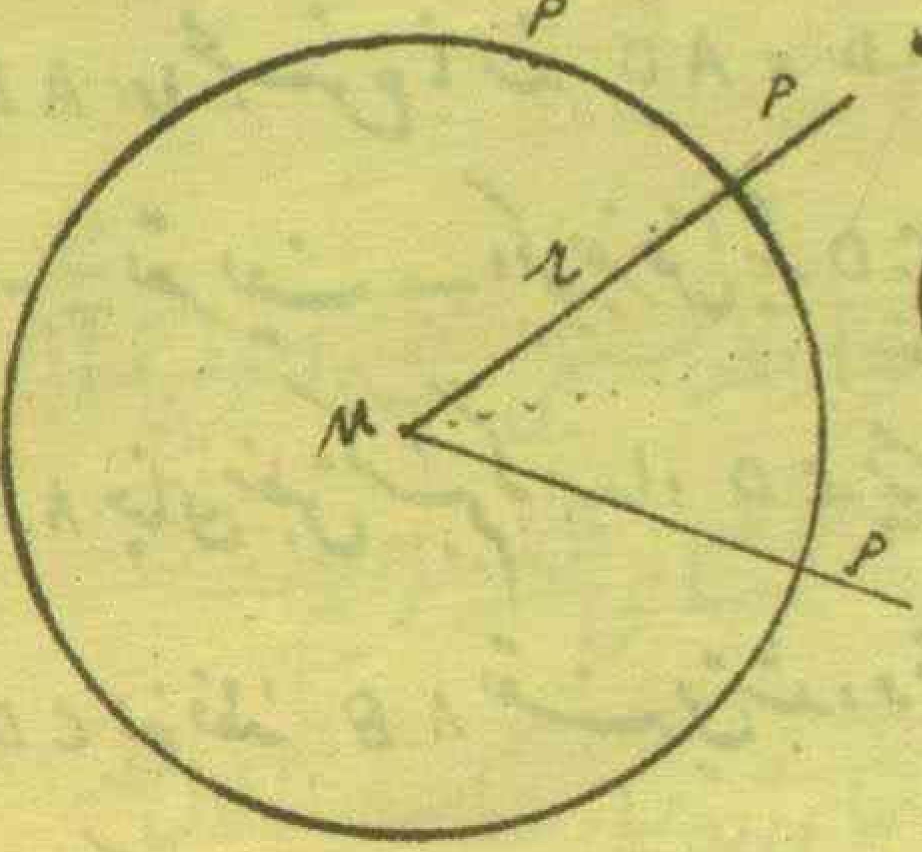
۴۰ – **تعریف** – هرگاه دو قطعهٔ متساوی را جمع کنیم نقطه مشترک رو مجموع مجموع را مضاعف هر یک از دو قطعه گوئیم

۴۱ – **فرع** – چون میتوان هر قطعه را مجموع دو قطعهٔ متساوی دانست معلوم میشود که هر قطعه یک نقطه وسط دارد

ه – دایره و مکان هندسی

۴۲ – هرگاه خط شعاعی حول مبداء خود نقطه M ش ۴ – دوران کند هر یک از نقاط آن مانند P خطی رسم میکند که جمیع نقاطش از نقطه M بفاصله MP واقع شده و این خط منحنی است

۴۳ – **تعریف** – خط منحنی معبر نقطهٔ متحرکی است که دائماً جهة حرکت خود را تغییر دهد



۴۴ – **تعریف** – محیط دایره خطی است منحنی که جمیع نقاطش از نقطه معینی موسوم به مرکز بیک فاصله واقع باشد

۴۵ – **تعریف** – فاصله هر نقطه محیط دایره را از مرکز شعاع یا نیم قطر گوئیم و آن را معمولاً بحرف ر مینمائیم

۴۶ – **فرع** – جمیع نیم قطرهای دایره متساویند

۴۷ – **تعریف** – قطعه مستقیمی که از مرکز مرور نموده و از طرفین بمحیط دایره ختم شود به قطر دایره موسوم است

۴۸ – **فرع** – در دایره مفروضه جمیع اقطار متساویند

۴۹ – **فرع** – مرکز دایره جمیع اقطار را نصف میکند

۵۰ – **فرع** – دایره بواسطه مرکز و شعاعش کاملاً مشخص میشود و باین مناسبت وقتی بخواهیم دایره را که مرکزش نقطه ن و شعاعش بطول ر باشد بنمائیم چنین مینویسیم (ن ، ر)

۵۱ – **فرع** – هر نقطه که فاصله اش از مرکز مساوی شعاع باشد بر محیط دایره و هرگاه فاصله اش بیش از شعاع باشد در خارج والا در داخل دایره است

۵۲ - تعریف - مکان هندسی شکلی است که نقاطش دارای خاصیت معینی باشد بشرط اینکه نقاط خارج آن از این خاصیت عاری باشند

۵۳ - مکان هندسی ۱ - محیط دایره (ر و M) مکان هندسی نقاط است که از نقطه M بفاصله ر واقع باشند (استنباط از فرع ۵۱)

تمرینات

مسئله ۱ - مطلوب است تعیین نقاطی که از نقطه معروضه M بفاصله ۵ = ر سانتیمتر واقع باشند

حل مسئله - بدو مقیاس (ستاره مدرج سانتیمتر و میلیمتر) فرجه پرکار را (مدادی یا رکبی) مساوی ۵ سانتیمتر بگیریم و باین شعاع از مرکز M دایره رسم میکنیم محیط دایره جواب مسئله است

مسئله ۲ - مطلوبست تعیین نقطه که از دو انتهای قطعه ۸ = a سانتیمتر بفاصله ۶ سانتیمتر واقع باشد - مسئله چند جواب دارد

مسئله ۳ - مطلوب است یافتن نقطه که از مبداء ۸ سم = a بفاصله ۵ س م و در انتهای آن نقطه بفاصله ۶ س م باشد مسئله چند جواب دارد (س م علامت سانتیمتر است)

مسئله ۴ - کدام است انقطه از مستقیم A B که از نقطه خارجی C بفاصله ر س م واقع

باشد عدهٔ چنین نقاط چند است و شرط امکان مسئله چیست (باید دایرهٔ (ر و O) خط AB را قطع کند

مسئله ۵ — بر محیط دایره (O و ۱ سانتیمتر) نقطهٔ تعیین کنید که از نقطهٔ مفروضه A در خارج دایرهٔ س م فاصله داشته باشد در چه صورت مسئله ممکن نیست

و — قوس و تقسیم محیط دایره

۵۴ — **تعریف** — چون بر محیط دایره دو نقطه فرض کنیم قسمتی از محیط را که مابین این دو نقطه میافتد **قوس** نامیم

۵۵ — **فرع** — هرگاه دو دایره بیک شعاع باشند قوسهای آنها بریکدیگر قابل انطباق میباشند بطوریکه میتوان بوسیلهٔ انطباق دو قوس از یک دایره یا دو دایرهٔ متساوی را بایکدیگر سنجیده لیکن اگر دو شعاع یعنی دو دایره متساوی نباشند قوسهای آنها قابل انطباق نیستند و سنجیدن آنها بیکدیگر بوسیلهٔ انطباق امکان ندارد

۵۶ — **تجربه** — هرگاه چندین دایرهٔ متحد المرکز رسم نموده یکی از آنها را بقوسهای متساویه قسمت نموده از مرکز بنقاط تقسیم وصل کرده امتداد دهیم بوسیله گردانیدن دایرهٔ منقسمه حول مرکز معلوم میشود که این خطوط شعاعی

سایر دوایر را نیز بر قوسهای متساویه قسمت کرده اند

۵۷ - **تعریف** - چون محیط دایره را بر ۳۶۰ قوس متساوی تقسیم کنیم هر یک را قوس یکدرجه یا بالاختصار درجه نامیم

۵۸ - **فرع** - طول قوس یکدرجه با طول شعاع تغییر میکند

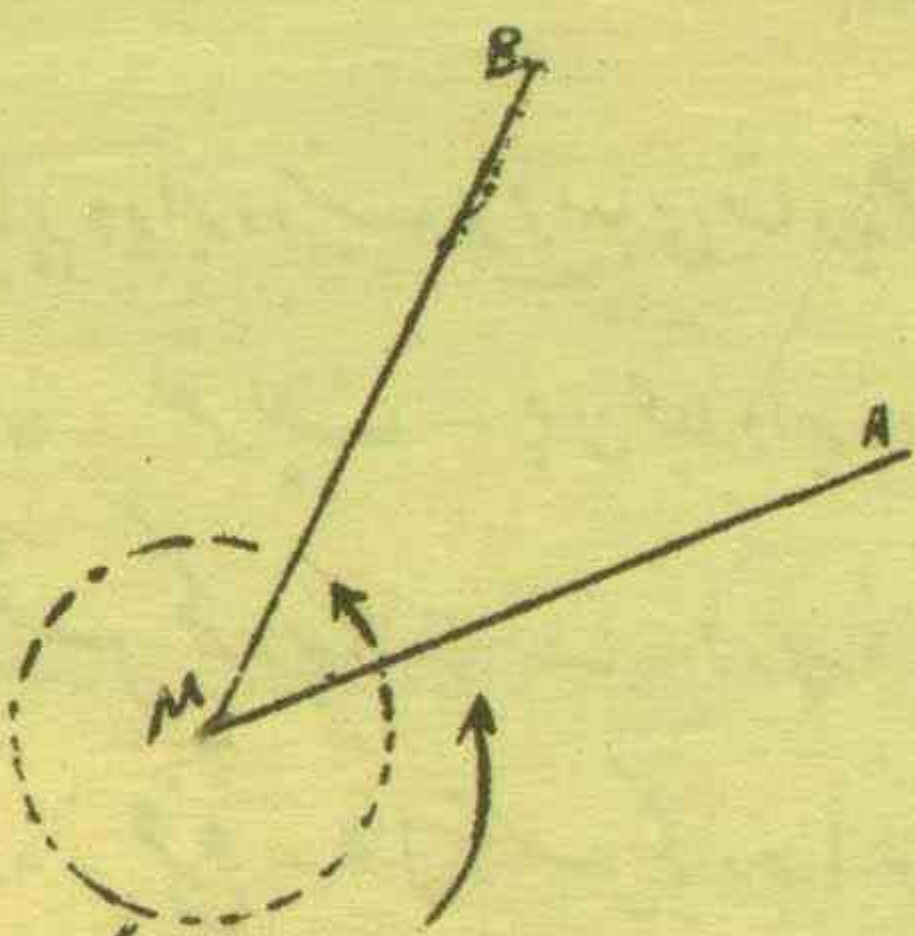
۵۹ - **تعریف** - قوس را گوئیم n (الفا) درجه است وقتیکه n مرتبه شامل $\frac{1}{360}$ محیط دایره خود باشد

۶۰ - **فایده** - عده درجات قوس مفروض را بوسیله (نقاله) که نیمدایره برنجی یا شاخی منقسم به ۱۸۰ درجه است معلوم میکنند باینطریق که مرکز نقاله را بمرکز قوس منطبق مینمایند تا دو شعاعی که بمبدا و منتهای قوس گذشته عده درجات آنرا بر محیط نقاله مشخص کند

ذ - زاویه و اندازه آن

۶۱ - **تعریف** - هرگاه دو خط شعاعی از یک مبدا خارج شوند شکل حاصل را زاویه نامند (۸) دو خط شعاعی را دو ضلع زاویه و مبدا مشترک را راس زاویه خوانند

۱ میتوان چنین تصور کرد که شعاع MB از گردش شعاع MA حاصل



نقطه M حاصل شده باشد و از این تصور
دو فرع ذیل نتیجه میشود

۶۳ – فرع – هرگاه خطی شعاعی حول
مبدأ خود دوران کند زاویه تولید مینماید

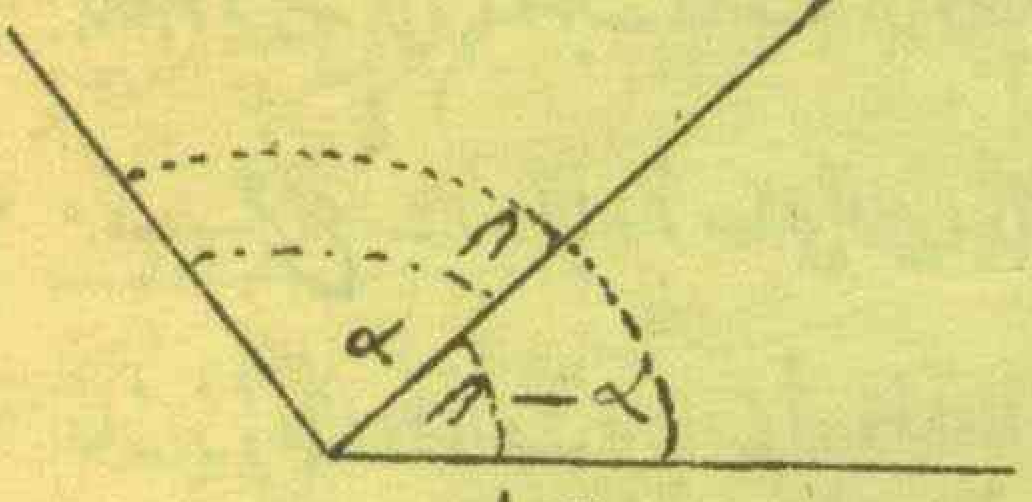
۶۴ – فرع – شعاع MB بدو وجه از دوران شعاع MA حاصل میگردد
موافق اینکه دوران از راست بچپ یا از چپ براست دهد پس دو خط شعاعی
MA و MB دو زاویه تشکیل داده اند اما معمولاً مقصود از زاویه بین دو خط
زاویه کوچکتر است

۶۵ – قرار داد – برای تسهیل کتابت و تلفظ اغلب زوایا را بواسطه حرف
یونانی کوچک (بجدول آخر کتاب رجوع شود) تعیین میکنند گاهی نیز زاویه را به سه حرف
میخوانند بشرطیکه حرف رأس در وسط واقع شود

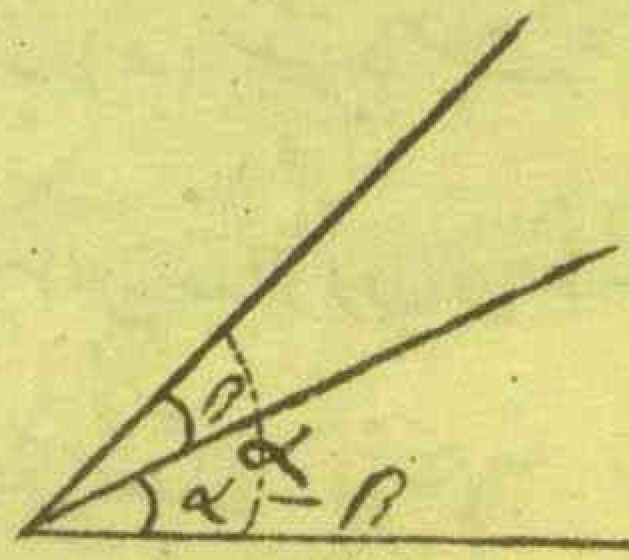
۶۶ – تعریف – هرگاه زاویه β (بتا) را بر زاویه α چنان منطبق کنیم که
رأس و یک ضلعشان مشترک گردد سه حالت ممکن است اتفاق افتد
اولاً – اگر ضلع دوم β بر ضلع دوم α منطبق شود دو زاویه را متساوی
گوئیم



ثانیاً اگر ضلع دوم β مابین دو ضلع α واقع شود ش ۷ β را کوچکتر از α گویم



ش ۸



ش ۷

ثالثاً اگر ضلع دوم β نسبت بدو ضلع α در یکطرف یعنی خارج از زاویه α
افتد ش ۸ β را بزرگتر از α گویند

۶۶ - **فایده** - در ضمن دوران خط شعاعی که ضلع زاویه فرض شده هر نقطه آن
قوسی رسم میکند که برحسب مقدار دوران یعنی مقدار زاویه کوچک یا بزرگ است و بعبارة
اخری بنسبت مقدار زاویه تغییر میکند اما همه بحسب عدهٔ درجات متساویند و بنابراین ممکن است
زاویه را بوسیلهٔ قوسی که از مرکز رأس آن بین دو ضلعش رسم شده باشد سنجید

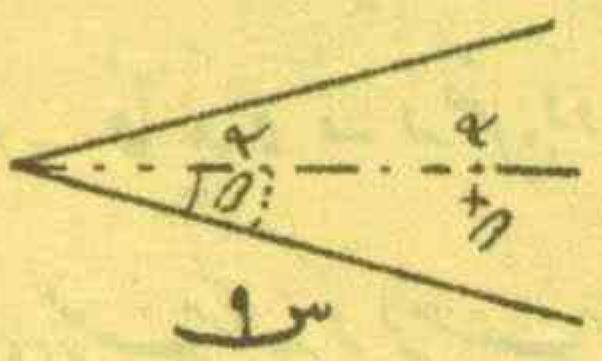
۶۷ - **تعریف** - واحد زاویه زاویه ایست که قوس مقابلش (قوسی که بمرکز رأس
مابین دو ضلع رسم شود) قوس یکدرجه باشد و آن را زاویهٔ یکدرجه یا باختصار
درجه (۰) نامند

۶۸ - **فرع** - زاویه α زاویه ایست که قوس مقابلش α برابر قوس یکدرجه باشد
ازاین فرع استنباط میشود که زوایا را نیز بوسیلهٔ آلت نقاله میتوان اندازه گرفت

۶۹ – **تنبیه** – باید دانست که برای سنجیدن زوایای کوچکتر از یک درجه اجزا بر ۶۰ دقیقه (′) و یک دقیقه را بر ۶۰ ثانیه (″) منقسم ساخته اند

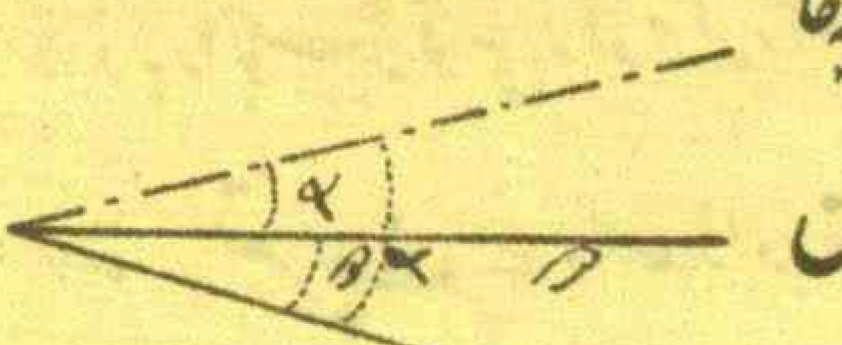
۷۰ – **فرع** – زوایا و قوسهای دایره را میتوان مقدار دوران خط شعاعی دانست و اندازه آنها اختلاف بین امتداد و خط را معین میکند

۷۱ – **تعریف** – هرگاه زاویه α را طوری قرار دهیم که راس و یکضلعش با زاویه B مشترک باشد α و B را دو زاویه مجاور گوئیم حال اگر α بر B منطبق نباشد یعنی هرکدام در یک طرف ضلع مشترک واقع باشند و ضلع مشترک



ش ۹

را محذوف فرض کنیم زاویه حاصله را مجموع α و B گوئیم ش ۹ و اگر α بر B منطبق و کوچکتر از آن باشد از حذف ضلع مشترک زاویه حاصل میشود که آن را فضل B بر α یا باختصار تفاضل B و α گویند ش ۱۰



ش ۱۰

ح – اوضاع نسبی دو زاویه – زوایای مخصوصه

۷۲ – وقتی دو مستقیم تقاطع میکنند چهار زاویه تولید میشود

تعریف – دو زاویه را که از تقاطع دو مستقیم حاصل شده و یک ضلعشان

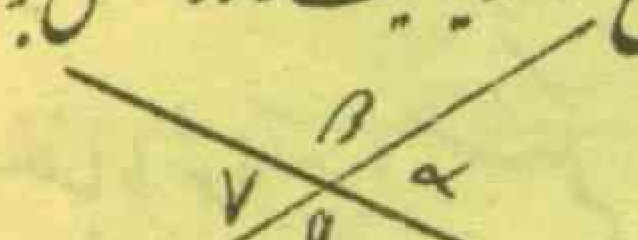
مشترک باشد مجانبه یکدیگر اصطلاح میکنیم ش ۱۱ α و β)

۷۳ - **تعریف** - دو زاویه را که از تقاطع دو مستقیم حاصل شده و دو ضلع هر یک امتداد دو ضلع دیگر است متقابله بالرأس گویند ش ۱۲



ش ۱۱

۷۴ - **تعریف** - زاویهٔ دو قائمه یا نیم سطح زاویه ایست که دو ضلعش بر یک استقامت باشند



ش ۱۲

۷۵ - **فرع** - جمیع زوایای نیم سطحی متساوی و هر یک معادل ۱۸۰ میباشند

۷۶ - **تعریف** - زاویه را مقعر گوئیم وقتی کوچکتر از نیم سطح باشد و **محدب** خوانیم هرگاه بزرگتر از آن باشد

۷۷ - **تعریف** - هرگاه دو زاویهٔ مجانبه متساوی باشند هر یک را زاویهٔ قائمه یا بالاختصار قائمه نامند ش ۱۳ α و β)



ش ۱۳

۷۸ - **فرع** - زاویهٔ قائمه نصف زاویهٔ نیم سطح است پس جمیع زوایای قائمه متساوی و هر یک معادل ۹۰ میباشد

۷۹ - **تعریف** - هر یک از دو ضلع زاویهٔ قائمه را بر ضلع دیگر عمود گویند

۸۰ - **تعریف** - زاویه را حاده یا منفرجه گوئیم موافق آنکه کوچکتر از قائمه یا بزرگتر از آن باشد

فصل دوم — احکام راجع بزوایا

۱— قضیه — اقسام برهان — علوم متعارفه

۸۱ — هرگاه در شکلی بعضی خواص و شرایط را محقق شماریم آن خواص و شرایط را فرض یا مفروضات (ف) گوئیم و اگر از فرض خواص یا خاصیت جدیدی برای شکل استنباط شود آنرا حکم (ح) نامند

۸۲ — فرض و حکم را من حیث المجموع قضیه نامند و صحت قضیه بواسطه برهان که یک رشته استدلال منطقی است معلوم میشود

۸۳ — وسائل استدلال یا قضایائیست که قبلاً محقق شده باشد یا مطالبی است که بنفسه محقق بوده محتاج برهان نباشد و بعبارة اخری از بدیهیات شمرده شود

در هندسه از چنین حقایق که به علوم متعارفه موسومند عدهٔ قلیلی در کار است از این قرار

ا) کل بزرگتر است از جزو خود

ب) کل مساویست با مجموع اجزای خود

ج) هریک از دو مقدار متساوی را میتوان بجای دیگری قرارداد

مثلاً اگر $a = b$

و $b + c = d$ باشد

پس نتیجه $a + c = d$ خواهد بود

د) دو مقدار مساوی با مقدار ثالث خود متساویند

مثلاً اگر فرض شود $a = c$

و $b = c$

نتیجه میشود $a = b$ (میتوان این حکم را از حکم سابق استنباط نمود)

ه) هرگاه دو مقدار متساوی را بر دو مقدار متساوی دیگر افزوده یا از آنها بکاهیم دو مجموع یا دو تفاضل متساویند

مثلاً اگر $a = c$

و $b = d$.

در نتیجه $a + b = c + d$

و $a - b = c - d$

و) هرگاه دو مقدار متساوی را در دو مقدار متساوی دیگر ضرب یا بر آنها تقسیم کنیم دو حاصل ضرب یا دو خارج قسمت متساویند.

مثلاً اگر

$$a = c$$

و

$$b = d$$

معلوم است که

$$a \times b = c \times d$$

و

$$a : b = c : d$$

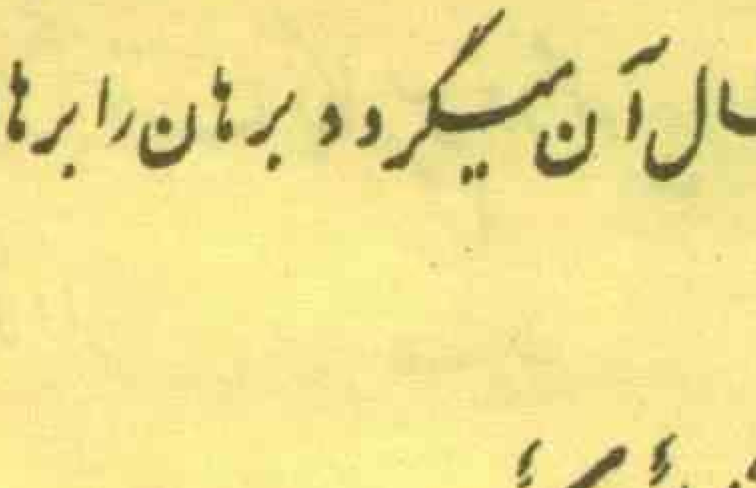
۸۴ - هرگاه صحت قضیه بواسطه استعمال علوم متعارفه یا قضایائیکه قبلاً محقق شده باشد
و یا بواسطه فرض قضیه معلوم شود برهان را مستقیم گویند

اگر اثبات قضیه بدینطریق کنند که تصور صورت دیگر برای قضیه منجر بقبول امر
محالی از قبیل تساوی جزء و کل و امثال آن میگردد برهان را برهان
خلف نامند

ب - زوایای مجانبه و متقابله برأس

۸۵ - قضیه ۱ - مجموع دو زاویهٔ مجانبه دو قائمه است ص ۱۴

حکم - $\alpha + \beta = ۱۸۰°$



زیرا چون دو زاویهٔ α و β را جمع کنیم
یک زاویهٔ نیم سطح حاصل میشود و زاویهٔ ص ۱۴
نیم سطح مضاعف زاویهٔ قائمه است (تعریف) ع ۲۷

۸۶ - **تعریف** - نتیجه حکمی است که بلا فاصله از قضیه استنباط میشود

۸۷ - **نتیجه** - هر زاویه مساویست با فضل ۲ قائمه بر زاویه مجانبه خود

مثلا در س ۱۴ $\beta - \overset{\text{قائمه}}{2} = \alpha$ یا $\alpha - \overset{\text{قائمه}}{2} = \beta$

۸۸ - **قضیه** - دو زاویه متقابله بر اس متساویند س ۱۴

(ح) $\alpha = \gamma$ و $\beta = \delta$

(ب) - α و γ را زاویه β مجانبه است پس نتیجه (ق ۱)

$$\alpha = \overset{\text{قائمه}}{2} - \beta$$

$$\gamma = \overset{\text{قائمه}}{2} - \beta$$

پس بعلوم متعارفه (ج) $\alpha = \gamma$

۸۹ - **تعریف** - قضایائیکه در درجه دوم اهمیت باشند بعنوان **فرع** ذکر خواهند شد

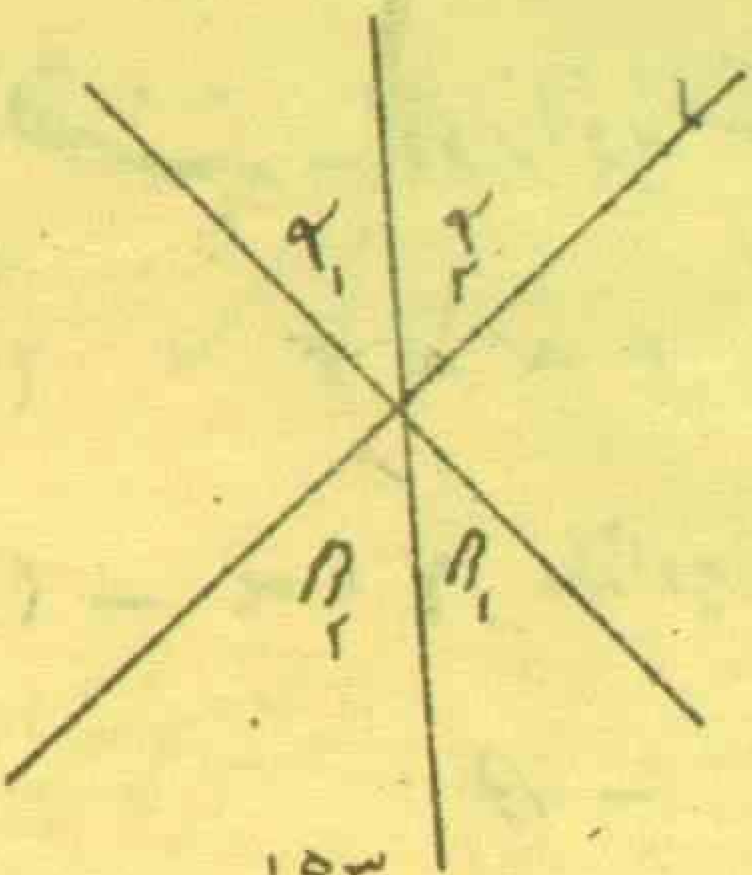
۹۰ - **فرع** - هرگاه یکی از چهار زاویه که از تقاطع دو مستقیم حاصل میشود قائمه باشد سه زاویه دیگر نیز قائمه اند

راه برهان - استعمال ق ۱ (دو زاویه مجانبه) و ق ۲ (دو زاویه متقابله) وسیلهٔ اثبات این حکم میشوند

۹۱- **فرع** - منصف هریک از دو زاویهٔ متقابله بر راس منصف دیگریست

(ف) شکل ۱۵ $\alpha_1 = \alpha_2$ (بخوانید α زیر یک و α زیر ۲)

(ح) $\beta_2 = \beta_1$



شکل ۱۵

(ب) چون بفرض $\alpha_1 = \alpha_2$

و (ق ۳) $\alpha_2 = \beta_2$

پس بعلوم متعارفهٔ اب $\alpha_1 = \beta_2$

ولی $\beta_1 = \alpha_1$

و بنابراین بعلوم متعارفهٔ (ج) $\beta_1 = \beta_2$

۹۲- **فرع** - منصف دو زاویهٔ مجانبه بر یکدیگر عمودند

(ف) شکل ۱۶ $\widehat{CDO} = \widehat{BDO}$ ، $\widehat{CDE} = \widehat{ADE}$

(ح) $DG \perp EF$ (علامت $\perp$ را عمود بر بخوانید)

(ب) چون $\widehat{CDG} = \widehat{BDG}$ (به ف)

$\widehat{CDE} = \widehat{ADE}$ (به ف)

پس $\widehat{CDG} + \widehat{CDE} = \widehat{BDG} + \widehat{ADE}$ (علوم متعارفه ح)

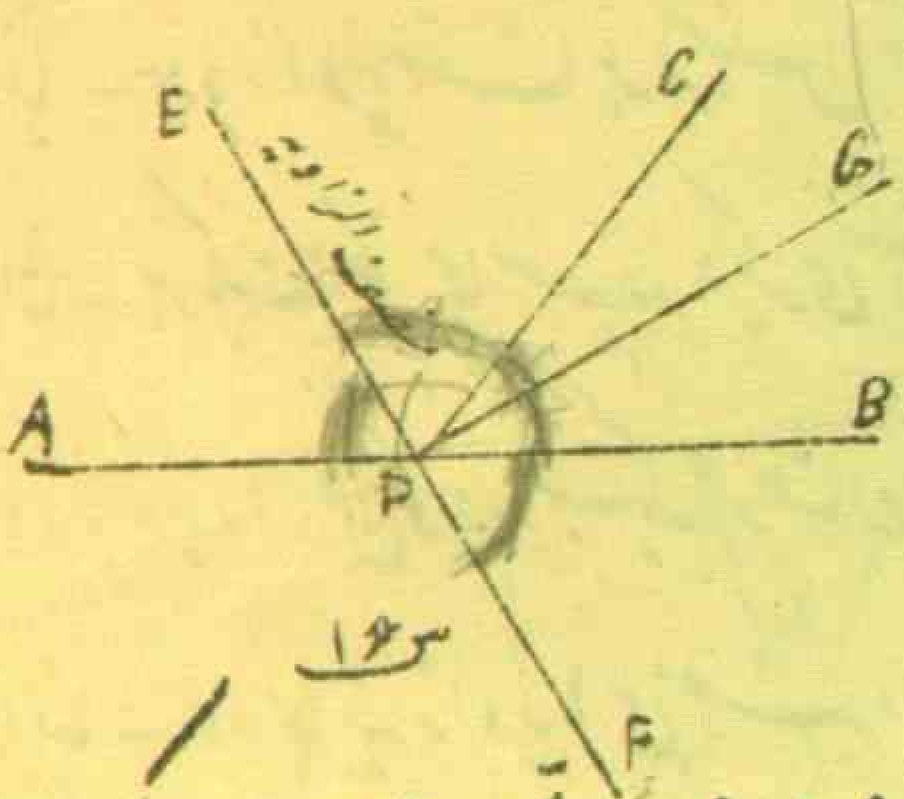
ولی $\widehat{ADE} = \widehat{BDF}$ (متقابلان)

پس $\widehat{CPG} + \widehat{CPE} = \widehat{BPG} + \widehat{BPE}$ (علوم متعارفه ج)

یعنی $GPE = GPF$

و بنابراین $GP \perp EF$

(بر متعلم است که این حکم را ببرهان دیگر متکی بر علوم متعارفه ثابت کند)



ش ۱۶

۹۲ — **قضیه ۳** — از نقطه مفروضه بر خط مستقیم میتوان یک عمود بر آن اخراج نمود

زیرا خط مستقیم زاویهٔ نیم سطحی است که نقطه مفروضه راس آن باشد و عمود مطلوب باید زاویهٔ قائمه تشکیل دهد و بنابراین منصف نیم سطح باشد و هر زاویه یک منصف دارد نه بیش

بوسیلهٔ دوران ضلع مشترک بین دو زاویهٔ مجانبه که راسشان نقطه مفروضه باشد نیز واضح میشود که اخراج یک عمود ممکن و بیش از یک عمود ممکن نیست زیرا که در حین دوران فقط در یک وضع دو زاویهٔ مجانبه متساوی و قائمه میشوند

احکام تمرینی در زوایای دو خط مستقیم

حکم ۱ — هرگاه دو زاویه متساوی باشند

اولاً - هریک با متقابله براس دیگری مساویست

ثانیاً - دو زاویهٔ متقابله براس آنها متساویند

ثالثاً - هریک مکمل مجانبه دیگری است

(دو زاویه را مکمل گوئیم وقتیکه مجموعشان نیم سطح یعنی دو قائمه باشد)

رابعاً - دو مجانبه زاویه‌های معنوضه متساویند

برهان حکم اخیر س۱۷ (ف) $\alpha = \alpha'$ (بخوانید

(ح) $\beta = \beta'$

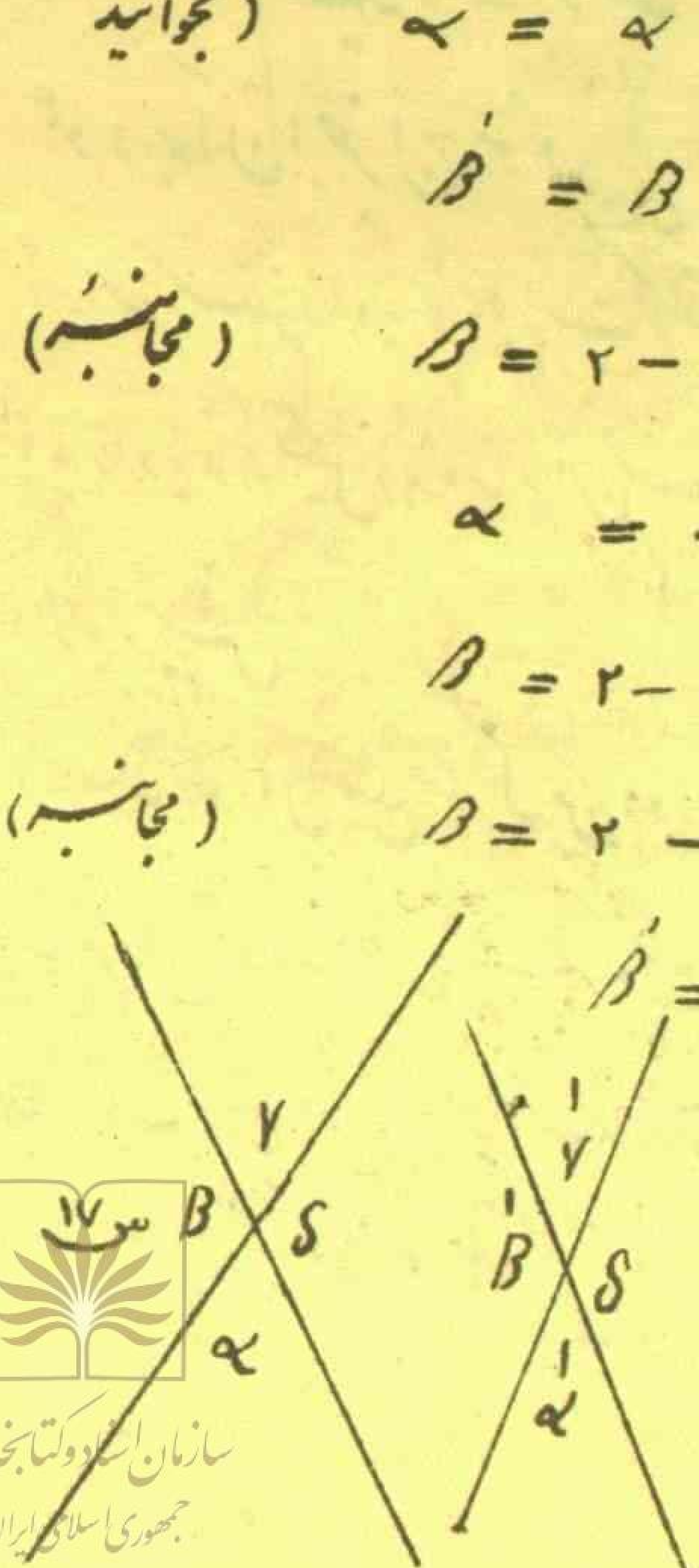
(ب) چون $\beta = 2 - \alpha$ (مجانبه)

و بفرض $\alpha' = \alpha$

پس بعلوم متعارفه (ج) $\beta = 2 - \alpha'$

ولی $\beta' = 2 - \alpha'$ (مجانبه)

بنابراین بعلوم متعارفه (د) $\beta = \beta'$



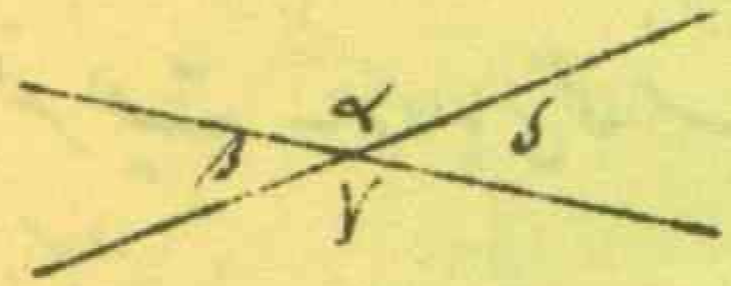
حکم ۲ - هرگاه دو زاویه مکمل باشند

اولاً - هریک با متقابله براس دیگری مکمل است

ثانیاً - دو متقابله براس آنها مکمل اند

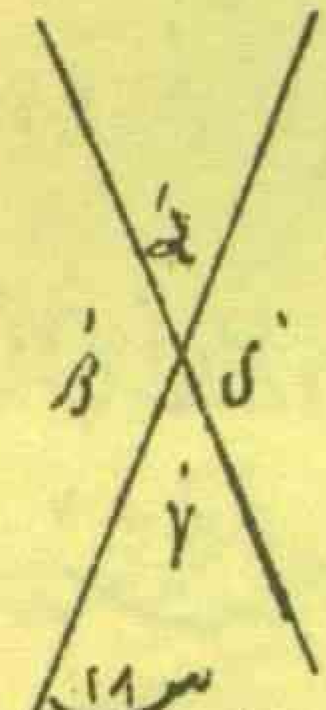
ثالثاً - هریک با مجانبهٔ دیگری مساویست

رابعاً - دو مجانبه آنها مکملند



برهان قسمت دوم حکم س ۱۸

(ف) $\alpha + \beta = 2$ق



(ح) $\gamma + \delta = 2$ق

(ب) چون $\alpha = \gamma$ (متقابلند)

و $\alpha + \beta = 2$ق   (ف)

پس $\alpha + \beta' = 2$ (علوم متعارفه ج)

ولی $\beta = \gamma$ (متقابله)

بنابراین $\gamma + \delta = 2$ق   (علوم متعارفه ج)

ج - مثلث و زوایای آن

۹۴ - **تعریف** - قسمتی از سطح مستوی که از اطراف به قطعه مستقیم محدود باشد موسوم است به **مثلث** (۵) سه قطعه مستقیم مزبور را سه **ضلع مثلث** و رؤس زوایای بین آنها را سه **رأس مثلث** و سه زاویه که بین آنها در داخل مثلث واقعند سه **زاویهٔ مثلث** خوانند و معمولاً مثلث را به حرف که در سه رأس نوشته شود

تعیین میکنید

۹۵ - **تعریف** - زوایای مجانب هریک از سه زاویهٔ مثلث را زوایای خارجهٔ مثلث گویند

۹۶ - **تعریف** - هر زاویهٔ خارجهٔ مثلث را با دو زاویه از مثلث که راس مشترک ندارند مقابله نامیم

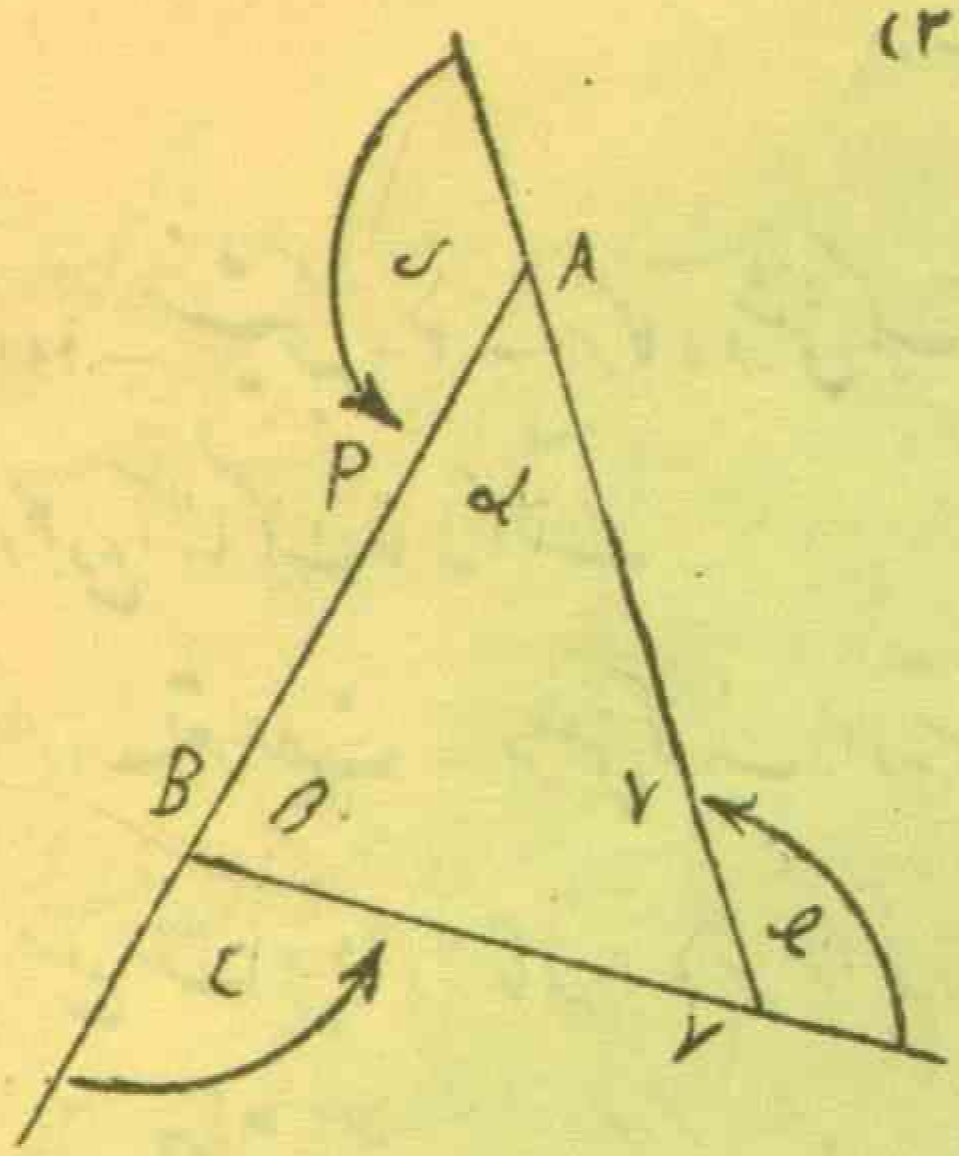
۹۷ - **فرع** - مجاور هریک از روس مثلث دو زاویهٔ خارجهٔ متساوی واقع است بطوریکه شش زاویهٔ خارجهٔ مثلث بدو دسته منقسم میشود یکی آنکه از امتداد دادن اضلاع در جهة حرکت عقربه های ساعت حاصل میشود دیگر آنکه از امتداد اضلاع در خلاف جهة سابق تولید میگردد و در هر دسته بر یک ضلع مثلث فقط یک زاویهٔ خارجهٔ واقعست

ش ۱۹۲ پس مثلث سه زاویهٔ خارجهٔ متمایز دارد و معمولاً مقصود از زوایای خارجهٔ مثلث این سه زاویه است

۹۸ - **قضیه ۴** - **مجموع سه زاویهٔ خارجهٔ مثلث چهار قائمه است**

برهان - فرض میکنیم متحرکی بر محیط مثلث ABC ش ۱۹۳ از نقطهٔ مانند P مفروض بر ضلع AB شروع بحرکت نموده بر اس B آمده و از آنجا بر اس C و بعد بر اس A رفته و بالاخره بنقطهٔ P معاودت کند

فوراً ملاحظه میشود که متحرک مزبور ناچار است در سه نقطهٔ B و C و A امتداد



حرکت خود را تغییر دهد از امتداد ارکه
در راس B برای توجه بر راس
C باندازهٔ زاویه ε بچرخد
و کذلک در دو راس C و A
کنند
باندازهٔ دو زاویه φ و δ دوران

اما بمناسبت استقامت ضلع در هیچیک از نقاط دیگر دورانی ندارد ولی چون
همواره در نتیجه چرخیدهٔ عاقبت بهمان جهة اول متوجه است معلوم میشود که
در ضمن حرکت یکدوره یعنی ۳۶۰ درجه یا چهار قائمه بدور خود دوران نموده ولهذا

$$\varepsilon + \varphi + \delta = ۴ \text{ قائمه}$$

۹۹- قضیه ۵- مجموع سه زاویهٔ هر مثلث دو قائمه است

برهان - چون مجموع دو زاویهٔ مجانبه دو قائمه است دیده میشود که در س ۱۹

$$(\alpha+\delta)+(\beta+\varepsilon)+(\gamma+\varphi) = \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\varphi = ۶ \text{ ق}$$

اما به ق ۴

پس بعلوم متعارفه

$$\frac{\delta+\varepsilon+\varphi = ۴\text{ ق}}{\alpha+\beta+\gamma = ۲\text{ ق} = ۱۸۰}$$

۱۰۰- نتیجه - هرگاه دو زاویهٔ مثلث معلوم شد زاویهٔ سوم نیز معلوم است $\alpha = ۱۸۰ - (\beta+\gamma)$

۱۰۱ - **نتیجه** -۲- هرگاه در مثلثی یک زاویه قائمه باشد دو زاویه دیگر حاده و مجموع آنها یک قائمه است

۱۰۲ - **تعریف** - هر مثلثی که یک زاویه اش قائمه باشد آن را قائمة الزاویه گوئیم وضلع مقابل زاویه قائمه را وتر خوانیم

۱۰۳ - **نتیجه** - ۳ - اگر یک زاویه مثلث منفرجه باشد دو زاویه دیگر حاده و مجموعشان نیز حاده است

۱۰۴ - **تعریف** - مثلثی که یک زاویه منفرجه داشته باشد موسوم به **منفرج الزاویه** است

۱۰۵ - **نتیجه** - ۴ - هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر مساوی باشد زاویه سوم مثلث اول با زاویه سوم مثلث دوم مساوی است

۱۰۶ - **نتیجه** - ۵ - هر زاویه خارجه مثلث با مجموع دو زاویه مقابله خود مساوی است زیرا

بنابر ق $\alpha + \beta + \gamma = ۲^{ق}$ ۱۹

ولی $\varphi + \gamma = ۲^{ق}$ (مجانبه)

پس $\varphi = \beta + \alpha$ (علوم متعارفه)

۱۰۷ - **نتیجه** - ۶ - هر زاویه مثلث مساوی است با فضل زاویه خارجه متقابله آن بر زاویه مقابل دیگر

۱۰۸- نتیجه ۷ - هر زاویه خارجه مثلث از زاویه مقابل خود بزرگتر است

۱۰۹- نتیجه ۸ - چون هر زاویه خارجه از نیم سطح کوچکتر است ممکن نیست در مثلث دو زاویه قائمه یا دو زاویه منفرجه واقع شود

۱۱۰- نتیجه ۹ - از نقطه واقعه در خارج مستقیم مفروض میتوان یک عمود بر آن فرود آورد نه بیش والا لازم میآید که مثلثی دارای دو زاویه قائمه وجود پیدا کند

۱۱۱- نتیجه ۱۰ - هرگاه بخواهند ثابت کنند که زاویه مفروضه ه بزرگتر از زاویه ح است میتوان این وسیله را استعمال کرد که ثابت کنند ح یا مساوی آن خارجه مثلثی است و ه مقابله آن است

تمرینات

مسئله ۱ - اگر ۱۶ً ۲۵َ ۴۷ْ = ه و ۲۸ً ۱۳َ ۸۴ْ = ط باشد زوایای ۷ و ۸ و ع و ح هرکدام چه مقدارند س۱۹

مسئله ۲ - فرض میکنیم ۲۹٫۴ ۲۲ ۷ = ه و ۲۶٫۴ ۱۱۸ = ع معلوم کنید مقدار سایر زوایا را س۱۹

مسئله ۳ - ۵۶ ۲۴َ ۱۰۴ْ = ۸ و ۱۲ً ۱۹َ ۱۴۸ْ = ع معلوم کنید سه زاویه مثلث را س۱۹

مسئله ۴ - در مثلثی که دو زاویه β و γ متساویند فرض میکنیم اولاً α = ۷۶ ۳۷ ۱۹ ثانیاً β = ۴۰ ۱۷ ۱۲ در هر حالت سایر زوایا را حساب کنید

مسئله ۵ - حکم - ثابت کنید که هرگاه در مثلثی دو زاویه متساوی باشند منصف زاویهٔ سوم بر ضلع مقابل عمود میشود

مسئله ۶ - حکم - ثابت کنید که هرگاه در مثلثی دو زاویه متساوی باشند عمودی که از راس سوم بر ضلع مقابل فرود آید منصف آن زاویه است

مسئله ۷ - حکم - هرگاه نقطه در داخل مثلث فرض نموده آنرا بدو راس مثلث وصل کنیم ثابت کنید که زاویهٔ بین این دو خط از زاویهٔ راس سوم مثلث بزرگتر است

د - زوایای کثیر الاضلاع

۱۱۲ - **تعریف** - قطعه از سطح مستوی را که به n خط مستقیم کاملاً محدود باشد کثیر الاضلاع n ضلعی یا بالاختصار n ضلعی (n گوشه) نامند

تعاریف راجعه براس و ضلع و زاویه و زاویهٔ خارجه عیناً همان است که برای مثلث ذکر کردیم

۱۱۳ - **تعریف** - خطی که دو راس غیر واقع بر یک ضلع را وصل میکند به قطر

کثیرالاضلاع موسوم است

۱۱۴- **فرع** - از هر راس کثیرالاضلاع اخراج ۳ - n قطر ممکن است

۱۱۵- **نتیجه** - عدهٔ اقطار کثیرالاضلاع n ضلعی از این دستور بدست میاید

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$ (بچه دلیل)

۱۱۶- **قضیه ۶** - **مجموع زوایای کثیرالاضلاع n ضلعی (۴ - $2n$) قائمه است**

برهان - از نقطهٔ مفروضه در داخل کثیرالاضلاع بروس آن وصل میکنیم تا کثیرالاضلاع n بر مثلث منقسم گردد مجموع زوایای این مثلثات $2n$ قائمه میشود اما مجموع زوایای کثیرالاضلاع باندازهٔ مجموع زوایای حول نقطهٔ مفروضه که راس مشترک مثلثات است یعنی باندازهٔ چهار قائمه کمتر از مجموع زوایای مثلثات میباشد پس مجموع زوایای کثیرالاضلاع چنین است

$$(2n-2) \text{ قائمه} - 4 = (2n-4) \text{ قائمه}$$

۱۱۷- **نتیجه** - مجموع زوایای خارجه کثیرالاضلاع با عدد اضلاع بستگی نداشته همواره مساوی چهار قائمه است

فصل سوم - تساوی و احکام مثلثات

۱ - حالات تساوی دو مثلث - برهان حالت اول و دوم

۱۱۸ - **تعریف** - دو شکل را متساوی گوئیم وقتی که بتوان آنها را بر یکدیگر بقسمی منطبق نمود که یکدیگر را کاملاً پوشانیده متحد و مبدل بشکل واحد گردند

۱۱۹ - **تعریف** - در دو شکل متساوی اجزائی را که در حین انطباق بر یکدیگر منطبق میشوند اجزاء متناظره نامیم و بعبارة اخری اجزاء دو شکل متساوی نظیر بنظیر متساوی باشند

۱۲۰ - **فرع** - در دو مثلث متساوی اضلاع متساویه مقابلند بزوایای متساویه و بالعکس

۱۲۱ - **تنبیه** - تساوی دو مثلث وسیلهٔ کثیرالاستعمالی است برای اثبات تساوی دو قطعه خط یا دو زاویه زیرا اگر دو مثلث که دو قطعه خط یا دو زاویهٔ مفروض در آنها دو جزء متناظر هستند متساوی باشند تساوی دو قطعه یا دو زاویهٔ مفروض مبرهن میشود

۱۲۲ - **مسئله** - میخواهیم مثلثی مساوی با مثلث مفروض رسم کنیم

حل - چون دو مثلث وقتی متساویند که جمیع اجزائشان متساوی باشند پس مثلث مطلوب $ABC = DEF$ باید با پنج شرط ذیل مطابقه کند

۱- باید زاویه D مساوی زاویهٔ A باشد   ازاین دوشرط نتیجه میشود

۲- « « E « B «   که F = C (قضیه)

۳- « ضلع DE « ضلع AB «

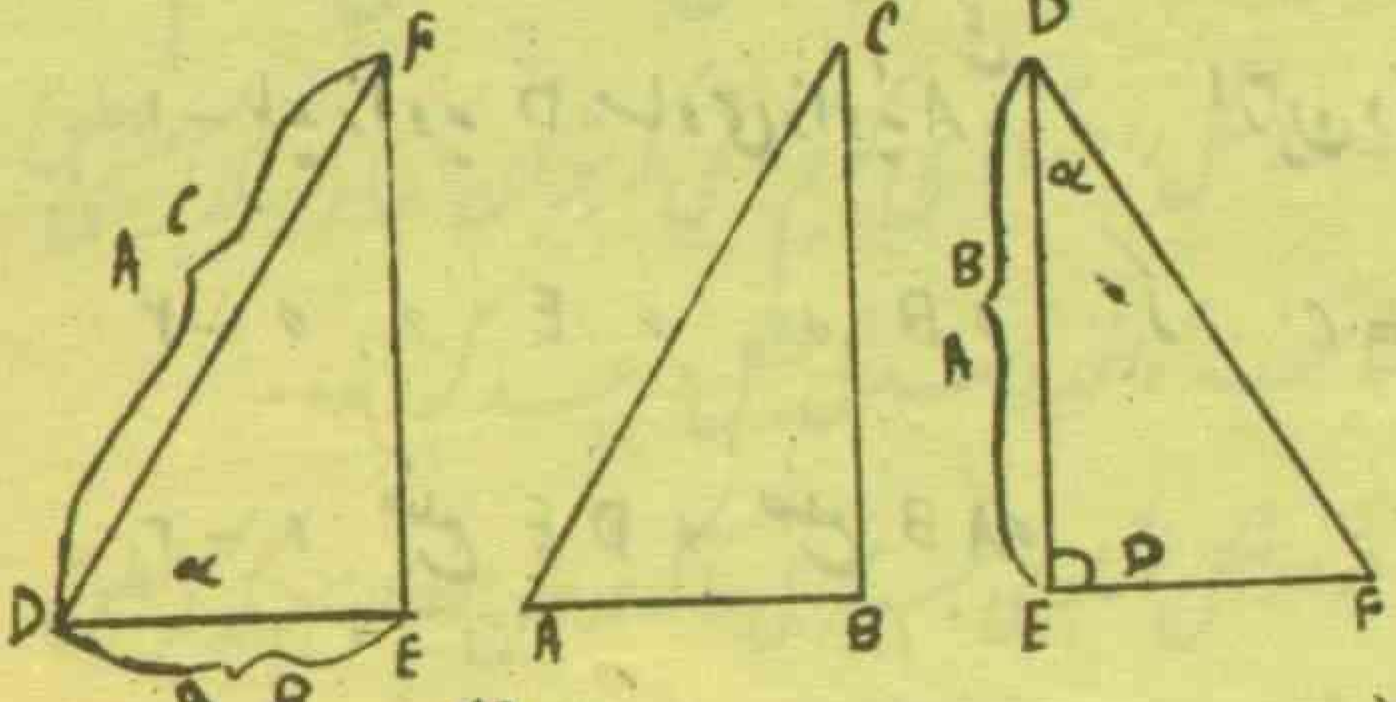
۴- « « DF « AC «

۵- « « EF « BC «

ولی بجهه رسم مثلث DEF چهار طریقه بیشتر متصور نیست وهر طریقهٔ دیگر تصور کنیم مبنی بر تبدیل رؤس واضلاع بر یکدیگر و لذا راجع بیکی ازاین چهار طریقه میگردد

طریقهٔ اول — ش ۲۰ بوسیلهٔ نقاله زاویهٔ D را مساوی با زاویهٔ A (شرط ۱) رسم نموده ضلع BE را مساوی AB (شرط ۳) جدا میکنیم و بر نقطهٔ E که نظیر B خواهد بود زاویهٔ E را مساوی زاویهٔ B (شرط ۲) رسم میکنیم و چون دو ضلع غیر مشترک از دو زاویهٔ D و E خود بر نقطهٔ F تقاطع میکند مثلث DEF کاملاً مشخص میشود

طریقهٔ دوم — ش ۲۱ زاویه D را بوسیلهٔ نقاله مساوی A (شرط ۱) رسم نموده دو ضلع DE و DF را بترتیب مساوی



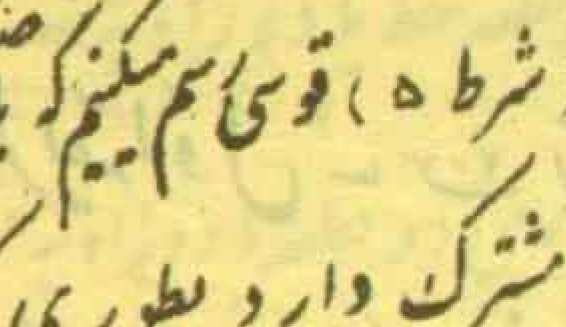
س ۲۱



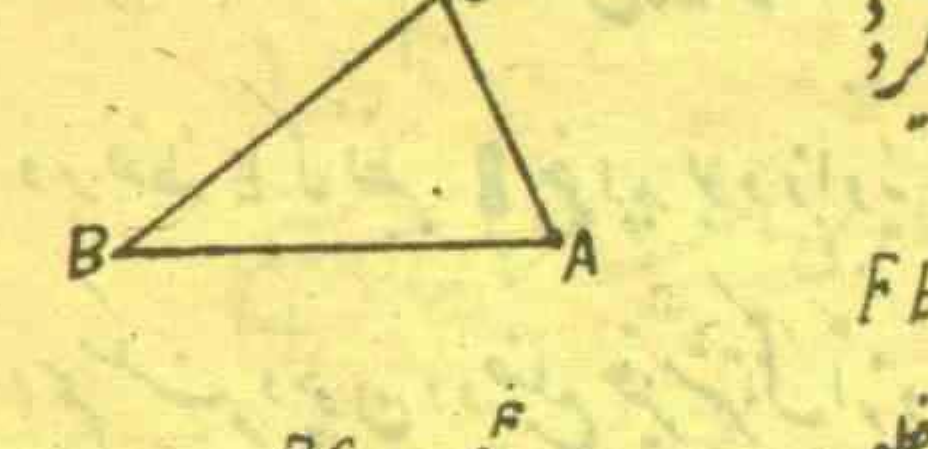
س ۲۰

با AB و AC (دو شرط ۲ و ۴) جدا میکنیم و چون خط مستقیم ما بین دو نقطه E و F منحصر بفرد است مثلث DEF کاملاً مشخص میگردد

طریقهٔ سوم — س ۲۲ بفرض اینکه $CB>AC$ باشد زاویه D را مساوی A (شرط ۱) و ضلع DF را مساوی AC (شرط ۴) رسم نموده بمرکز F و شعاع $EF = BC$ (شرط ۵) قوسی رسم میکنیم که با ضلع دیگر از زاویهٔ D (مساوی A) فقط یک نقطهٔ E مشترک دارد بطوری که زاویهٔ E و مثلث DEF کاملاً مشخص میگردد

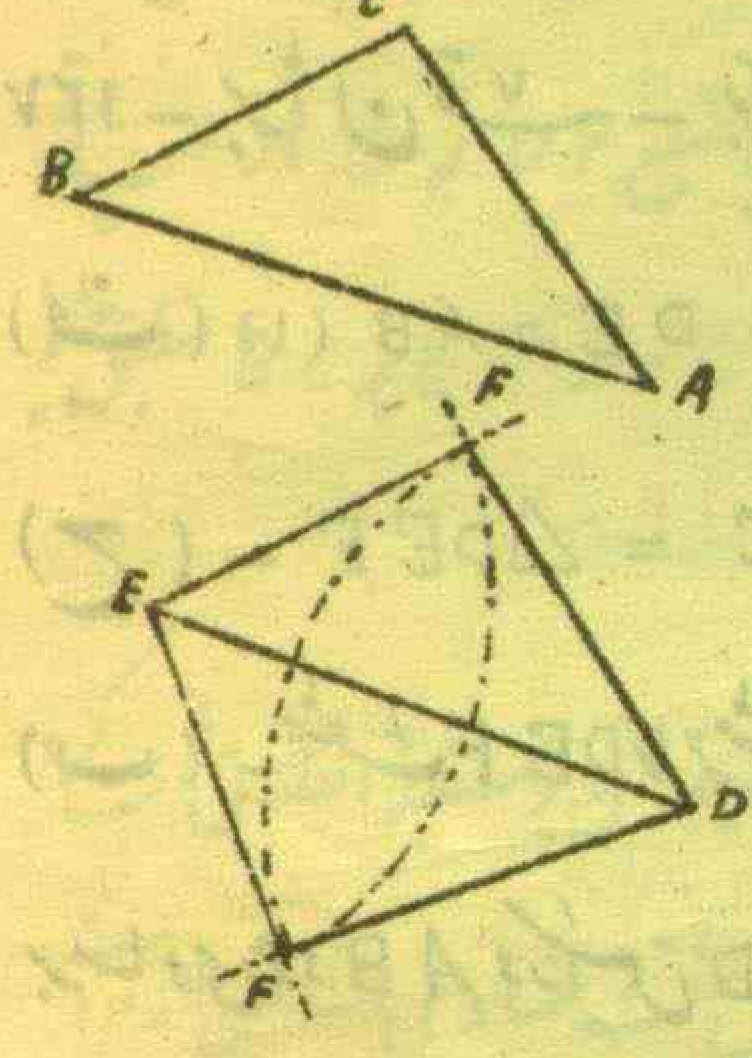


(دایرهٔ مرسومه بمرکز F و شعاع $FE = BC$ امتداد DE را در نقطهٔ دیگر G نیز قطع میکند و مثلثی تولید مینماید که زاویهٔ FDG در آن مکمل زاویه α میباشد)



س ۲۲

طریقهٔ چهارم - ۱۲۲ ضلع DE را مساوی با AB (شرط ۳) رسم نموده از دو مرکز D و E با دو شعاع DF=AC و EF=BC (شرط ۴ و ۵) دو قوس رسم میکنیم که بر دو نقطهٔ F و F' تقاطع میکنند هر یک از دو مثلث DEF و DEF' را میتوان جواب مسئله دانست چنانکه ملاحظه میشود



در هر یک از چهار طریقهٔ فوق سه شرط از پنج شرط بوسیلهٔ ترسیم اجرا میشود ولی در هر دفعه برهان واضح میگردد که دو شرط دیگر نیز بالتبع حاصل است و از اینجا چهار قضیهٔ ذیل در خصوص تساوی دو مثلث محقق میشود

۱۲۳ - قضیهٔ ۷ - هرگاه در دو مثلث دو زاویه و ضلع بینهما نظیر به نظیر متساوی باشند آن دو مثلث متساویند (حالت ز ض ز)

۱۲۴ - قضیهٔ ۸ - هرگاه در دو مثلث دو ضلع و زاویهٔ بینهما نظیر به نظیر متساوی باشند آن دو مثلث متساویند (ض ز ض)

۱۲۵ - قضیهٔ ۹ - هرگاه در دو مثلث دو ضلع و زاویهٔ مقابل بضلع اطول نظیر بنظیر متساوی باشند آن دو مثلث متساویند (ض ض ز)

۱۲۶ ـ قضیهٔ ۱۵ ـ هرگاه در دو مثلث سه ضلع نظیر بنظیر متساوی باشند آندو مثلث متساویند (ض ض ض)

۱۲۷ ـ برهان ق ۷ ـ بوسیلهٔ انطباق س ۲۰

ف) (۱) $DE = AB$ (۲) $\hat{A} = \hat{D}$ (۳) $\hat{B} = \hat{E}$

ح) ـ $\triangle ABC = \triangle DEF$

ب) ـ مثلث DEF را بر مثلث ABC چنان منطبق میکنیم که ضلع DE بر مساوی خود AB و رأس D بر A منطبق شود چون بفرض $DE = AB$ اولاً رأس E نیز بر رأس B منطبق میگردد و چون $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ ثانیاً ضلع DF بر امتداد AC قرار خواهد گرفت و نقطهٔ F بر یکی از نقاط AC واقع میشود و نقطهٔ F بر یکی و چون $\widehat{ABC} = DEF$ ثالثاً ضلع EF بر BC واقع میشود و نقطهٔ F بر یکی از نقاط BC پس نقطهٔ F ناچار بر محل تلاقی AC و BC یعنی رأس C منطبق میگردد زیرا یک نقطه نمیتواند دفعةً در دو مکان قرار گیرد و بنابراین مثلث DEF بکلی مثلث ABC را پوشانیده با آن مشتبه میشود و هوالمطلوب

۱۲۸ ـ برهان ق ۸ ـ بطریق انطباق س ۲۱

ف) ـ (۱) $DE = AB$ (۲) $D = A$ (۳) $DF = AC$

(ح) $\triangle DEF = \triangle ABC$

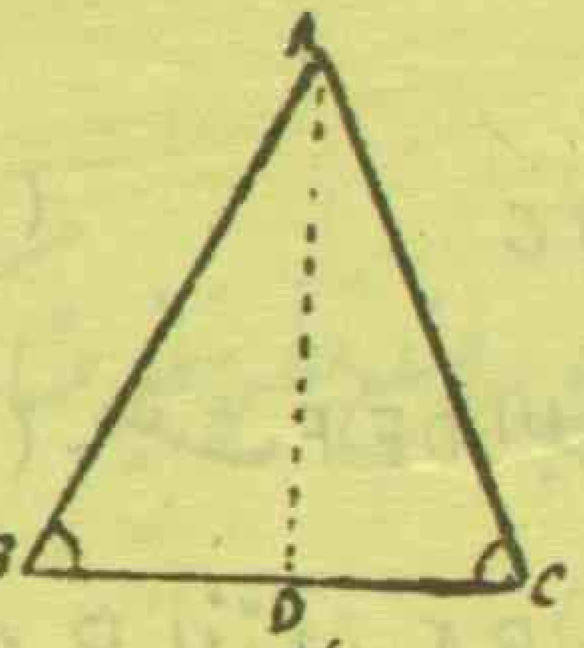
(ب) - مثلث DEF را بطریقی بر ABC منطبق میکنیم که DE بر AB و E بر B افتد چون ED = BA اولاً راس D نیز بر راس A واقع میشود و چون $\widehat{EDF} = \widehat{BAC}$ ثانیاً ضلع DF بر AC سایفتد و چون DF = AC ثالثاً F بر راس C و لذا EF بر BC منطبق میشود پس دو مثلث منطبق و متشابه میشوند

۱۲۹ - تنبیه - دو قضیه ۹ و ۱۰ را نمیتوان بوسیله انطباق ثابت کرد و برای اثبات این دو قضیه قبلاً معرفت خواص مثلث متساوی الساقین لازم است (برای برهان این دو قضیه به ۱۵۲،۱۵۳ رجوع کنید)

ب - خواص مثلث متساوی الساقین

۱۳۰ - تعریف - هرگاه مثلثی را دو ضلع متساوی باشد مثلث متساوی الساقین موسوم میشود و دو ضلع متساوی را دو ساق و ضلع سوم را بخصوص قاعده و راس مقابل را راس گویند مثلثی را که سه ضلعش متساوی باشند متساوی الاضلاع نامند

۱۳۱ - قضیه ۱۱ - در مثلث متساوی الساقین دو زاویه طرفین قاعده متساوی



شکل ۲۴

(ف) شکل ۲۴ $AB = AC$

(ح) $\hat{B} = \hat{C}$

(ب) - اگر زاویهٔ BAC را بخط AD نصف کنیم $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ (بالعمل)

و $AB = AC$ (بالفرض)

و $AD = AD$ (بعلوم متعارفه)

پس $\triangle ABC = \triangle ADC$ (ض ز ض)

وبنابراین $\hat{B} = \hat{C}$

۱۳۲ - نتیجهٔ ۱ - زاویهٔ خارجهٔ مثلث متساوی الساقین مجاورهٔ براس مضاعف هر یک از دو زاویهٔ قاعده است

۱۳۳ - نتیجهٔ ۲ - هر مثلث متساوی الاضلاع متساوی الزوایاست و هر زاویهٔ آن ۶۰ است (ثلث دو قائمه)

۱۳۴ - قضیهٔ ۱۲ - هرگاه در مثلثی دو زاویه متساوی باشند مثلث متساوی الساقین است

(دو ضلع مقابل بدو زاویهٔ متساویه متساویند)

(ف) ق ۲۳ $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

(ح) $AB = AC$

(ب) - اگر AD نصف زاویهٔ BAC باشد

چون $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$

و بالفرض $\widehat{B} = \widehat{C}$

نتیجه میشود $\widehat{ADB} = \widehat{ADC}$ (ق ٥)

ولی $AD = AD$

پس $\triangle BAD = \triangle CAD$ (ز ض ز)

و بنابراین $AB = AC$

۱۳۵ - **تعریف ۱** - وقتی فرض و حکم قضیه را بیکدیگر تبدیل کنیم قضیهٔ دیگر حاصل میشود که آن را **عکس** قضیهٔ اول گویند مثلاً ق ۱۳ عکس ق ۱۱ میباشد

تعریف ۲ - وقتی فرض و حکم قضیه را نفی کنیم قضیهٔ دیگر موسوم به مخالف قضیهٔ اول حاصل میگردد

تعریف ۳ - اگر فرض (یا حکم) قضیه را نفی کنیم اما حکم (یا فرض) آن را بحال اثبات گذاریم قضیهٔ دیگر حاصل میشود که آن را نقیض قضیهٔ اول

میگوئیم پس هر قضیه دارای یک قضیهٔ عکس و یک قضیهٔ مخالف و یک قضیهٔ نقیض است

۱۳۶ – **فرع** – عمودیکه از راس مثلث متساوی الساقین بر قاعده فرود آید قاعده و زاویهٔ راس را نصف میکند

۱۳۷ – **فرع** – منصف زاویهٔ راس بر وسط قاعده عمود میشود

۱۳۸ – **فرع** – خط واصل بین راس و وسط قاعده زاویهٔ راس را نصف نموده بر قاعده عمود میشود

۱۳۹ – **فرع** – عمودیکه بر وسط قاعده اخراج شود بر راس مرور نموده زاویهٔ راس را نصف میکند (اثبات فروع بر متعلم است)

۱۴۰ – قضیهٔ ۱۳ – خط واصل بین دو راس دو مثلث متساوی الساقین که در قاعده مشترک باشند

(ا) با انضمام ساقهای دو مثلث دو مثلث متساوی تشکیل میدهد

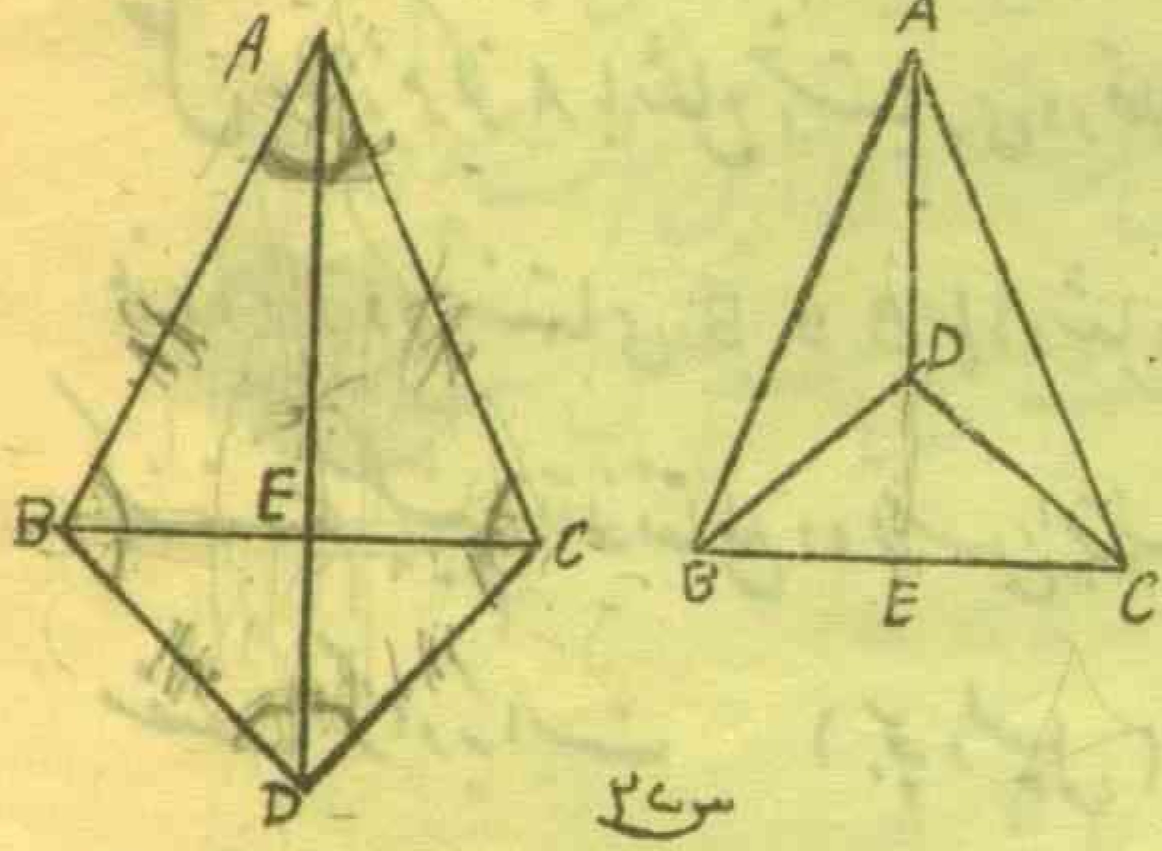
(ب) دو زاویهٔ راس مثلثهای مفروض را نصف میکند

(ج) بر قاعدهٔ مشترک عمود میشود

(د) قاعدهٔ مشترکه را نصف میکند

برهان - اگر دو مثلث راس ۲۵ ABC و BDC که در قاعدهٔ BC مشترکند فرض کنیم بقضیهٔ ۱۱

$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$



ش ۲۷

و $\widehat{DBC} = \widehat{DCB}$

پس $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$

ولی بالفرض $AB = DC$

و $DB = DC$

پس $\triangle ABD = \triangle ACD$

و $ADB = ADC$ (اتمام برهان بر عهدهٔ متعلم است)

۱۴۱ - باستعانت این قضیه مسائل اصلی ذیل را بدون احتیاج بمقیاس و نقاله یعنی فقط بمدد پرگار وستاره میتوان حل نمود

مسئله ۱ - میخواهیم قطعه AB را نصف کنیم

حل - از دو مرکز C و B با دو شعاع متساوی دو قوس رسم میکنیم بقسمی که یکدیگر را تقاطع کنند و بهمین طریق دو قوس دیگر رسم نموده دو نقطهٔ تقاطع را وصل میکنیم خط واصل CB را نصف میکند (بچه دلیل)

معمولاً اگر چهار قوس را با یک شعاع رسم میکنند آنوقت دو نقطه تقاطع در دو سمت BC واقع میشوند

مسئله ۲ – میخواهیم زاویهٔ معروضهٔ A را نصف کنیم

حل – از مرکز A با شعاع اختیاری دو قطعه متساوی از دو ضلع زاویه جدا نموده و از دو منتهای B و C با دو شعاع متساوی دو قوس که یکدیگر را قطع کنند رسم میکنیم و نقطهٔ تقاطع دو قوس را برأس زاویه وصل میکنیم خط واصل منصف الزاویه است (بچه دلیل)

مسئله ۳ – میخواهیم از نقطهٔ معروضه C روی مستقیم AB عمودی اخراج کنیم

حل – از طرفین C بشعاع اختیاری دو طول متساوی CA و CB را جدا نموده و از دو مرکز B و A با دو شعاع متساوی دو قوس متقاطع رسم میکنیم و محل تقاطع را به C وصل مینمائیم خط واصل عمود مطلوب است (بچه دلیل)

مسئله ۴ – میخواهیم از نقطهٔ C معروضه در خارج مستقیم AB عمودی بر این خط فرود آوریم

حل - از مرکز C با شعاعی اختیاری قوسی چنان رسم میکنیم که خط مفروض
را بر دو نقطه مانند A و B قطع کند از این دو مرکز با دو شعاع متساوی
دو قوس متقاطع رسم میکنیم و نقطهٔ تقاطع را بنقطهٔ C وصل مینمائیم

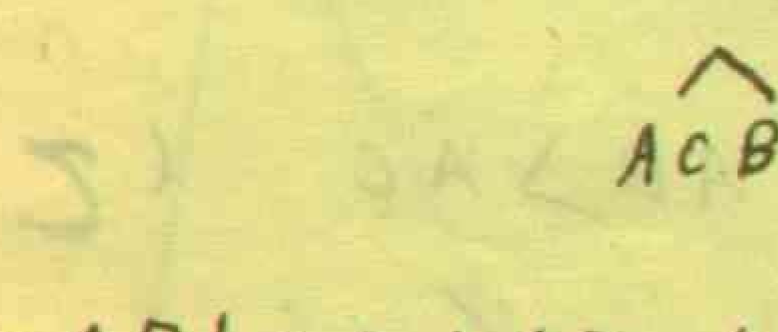
ج - چند حکم که بخواص مثلث متساوی الساقین اثبات میشود

۱۴۲ - قضیه ۱۴ - در هر مثلث ضلع اعظم مقابل است بزاویه اعظم

(ف) $AB > AC$ س ۲۶

(ح) $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$

(ب) - ضلع AC را امتداد داده AD را مساوی با AB جدا
نموده BD را وصل میکنیم پس مثلث ABD متساوی الساقین است و
و $\widehat{ACB}$ خارجه مثلث BCD



پس $\widehat{ACB} > \widehat{ADB}$ (۱)

ولی چون $\widehat{ADB} = \widehat{ABD}$

پس $\widehat{ACB} > \widehat{ABD}$

اما بالفرض $AB > AC$ و $AB = AD$ پس $AD > AC$ ولذا خط BC
در درون زاویه ABD مابین AB و BD میافتد

بنابراین $\widehat{ABD} > \widehat{ABC}$

حال بعد از جمع (۲) و (۳) و اسقاط $\widehat{ABD}$ از طرفین

نتیجه میشود $\widehat{ACD} > \widehat{ABC}$ وهو المطلوب

۱۴۳ - **قضیهٔ ۱۵** - در هر مثلث ضلع مقابل بزاویهٔ اعظم اطول است از ضلع مقابل بزاویهٔ کوچکتر (عکس ق ۱۴)

(ف) $\widehat{ACB} > \widehat{ABC}$ س ۲۶

(ح) $AB > AC$ س ۲۶

(ب) - (خلف) اگر $AB = AC$ فرض شود به ق ۱۱ باید $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ باشد و اگر $AC > AB$ فرض شود به ق ۱۴ باید $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$ باشد و این هر دو خلاف فرض است پس $AB > AC$ وهو المطلوب

۱۴۴ - **تنبیه** - اغلب باستعانت این دو قضیه عدم تساوی دو ضلع یا دو زاویه را اثبات میکنند باین طریق که دو ضلع یا دو زاویهٔ مفروض را جزو مثلثی میآورند و یکی از دو قضیه را بکار میبرند

۱۴۵ - **نتیجهٔ ۱** - همیشه کوچکترین ضلع مثلث مقابل بزاویهٔ حاده است

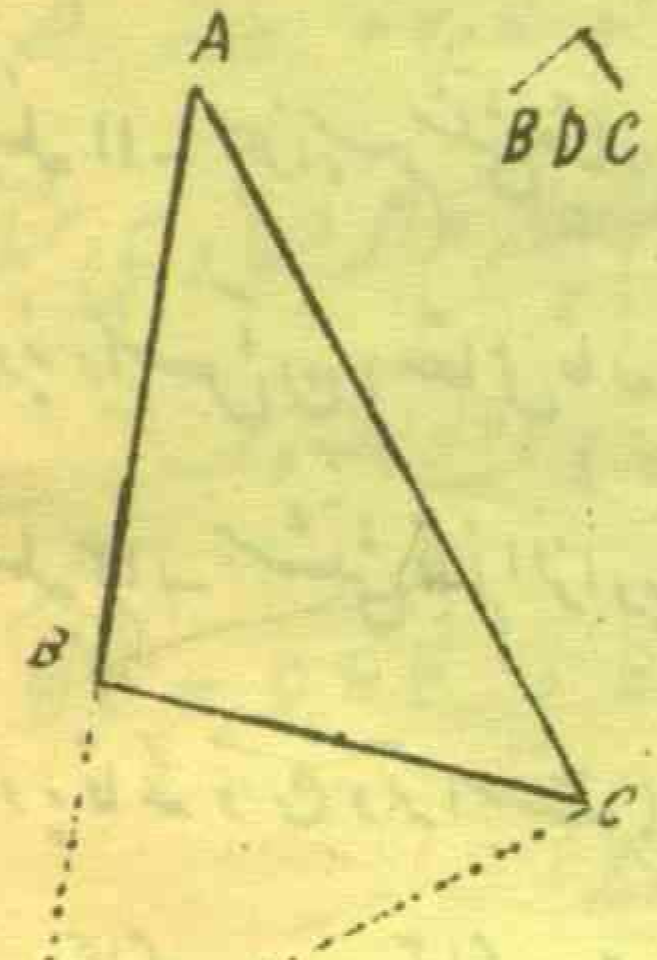
۱۴۶ - **نتیجهٔ ۲** - زاویهٔ مجاورهٔ بضلع اعظم مثلث همواره حاده است

۱۴۷ - **نتیجه ۳** - در مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل بزاویه قائمه موسوم بوتر و بزرگترین ضلع است

۱۴۸ - **نتیجه ۴** - عمودیکه از نقطه خارج خط بر آن فرود آید اقصر خطی است که از آن نقطه بدین خط وصل شود و بدین مناسبت فاصله نقطه را از خط بواسطه طول عمود بیان میکنند

۱۴۹ - **قضیه ۱۶** - در هر مثلث هر ضلع اقصر است از مجموع دو ضلع دیگر

(ب) ش ۲۷ ضلع AB را باندازهٔ BC امتداد داده DC را وصل میکنیم پس $AD = AB + BC$



ولی چون $BD = BC$ به ق ۱۱ $\widehat{BDC} = \widehat{BCD}$

اما $\widehat{ACD} > BDC$ (جزو و کل)

پس $\widehat{ACD} > BDC$

و بقضیه ۱۵ $AD > AC$

یعنی $AC < AB + BC$

۱۵۰ - **نتیجه ۱** - خط مستقیم اقصر فاصله بین دو نقطه است

۱۵۱ - **نتیجه ۲** - در هر مثلث هر ضلع اطول است از تفاضل دو ضلع دیگر

(برای توضیح این نتیجه کافی است از طرفین حکم قضیه BC را مثلاً تفریق کنیم و حاصل میشود $AC - BC < AB$

تمرینات

مسئله ۱ – زاویهٔ قائمه رسم کنید   مسئله ۲ – زاویه معادل ۴۵ رسم کنید

۶۷٫۵

مسئله ۳ – زاویه معادله ۲۲٫۵ رسم کنید   مسئله ۴ – « « ۶۷٫۵ « «

مسئله ۵ – « « ۶۰ «   مسئله ۶ – « « ۳۰ « «

مسئله ۷ – « « ۱۵ «   مسئله ۸ – « « ۱۰۵ « «

مسئله ۹ – « « ۵۲٫۵ «   مسئله ۱۰ – « « ۱۳۵ « «

مسئله ۱۱ – میخواهیم مثلثی متساوی الساقین رسم کنید که قاعدهٔ آن ۵ سانتیمتر a و زاویهٔ راس آن (مقابل قاعده) ۷۵° باشد

مسئله ۱۲ – یک مثلث قائم الزاویه از معلومات ذیل رسم کنید (a و b دو ضلع زاویه قائمه و c وتر است).

۱– $a =$ ۶ س‌م و $b =$ ۵ س‌م   ۲– $a =$ ۶ س‌م و $c =$ ۱۰ س‌م

۳– $a =$ ۷ س‌م و $\alpha =$ ۲۰°   ۴– $a =$ ۸ س‌م و $\beta =$ ۶۷٫۵°

۵– $c =$ ۱۲ س‌م و $\alpha =$ ۲۲٫۵°   ۶– $c =$ ۱۰ س‌م و $a =$ ۷ س‌م

مسئله ۱۳ – میخواهیم مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید (b_{α} علامت منصف الزاویه α است)

۱ — ۸ س‌م = a و ۹ س‌م = b و ۵۲ر۵ ═ ۷

۲ — ۱۰ س‌م = a . ۱۲ س‌م = b و ۱۰۵ ═ β

۳ — ۹ س‌م = a ۷۵ = β و ۵۲ر۵ ═ ۷

۴ — ۷ س‌م = a ۶۷ر۵ = α و ۷۵ ═ β

۵ — ۷ س‌م = b ۷۵ = ۹ و ۵ ═ ۹۰

۶ — ۹ س‌م = a و ۷ س‌م = ۹۰ و ۶۷ر۵ ═ β

د — برهان حالت سوم و چهارم از تساوی مثلثات

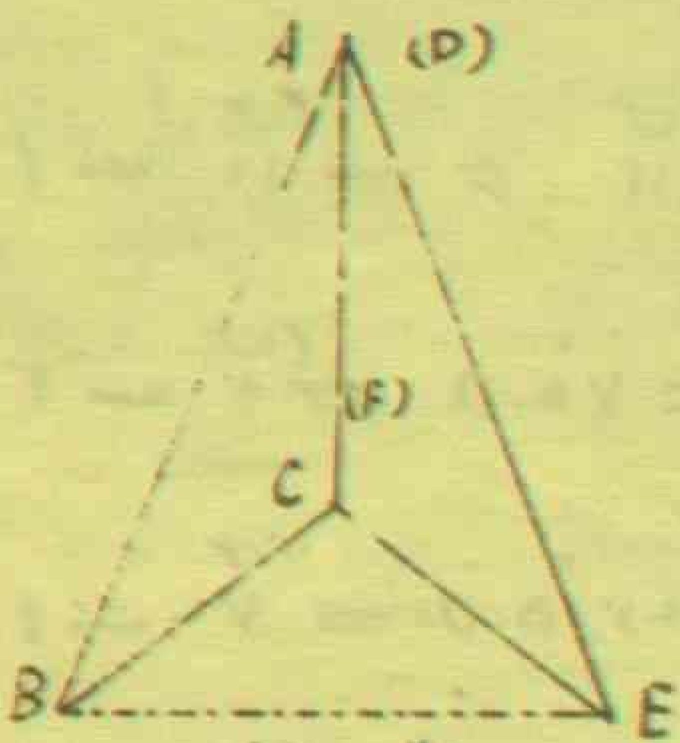
۱۵۲ — برهان قضیه ۹ (ف) ص ۲۸ الف و ب

و $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ و $BC = EE$ و $AC = DF$

(ح) — $\triangle ABC = DEF$

(ب) — مثلث DEF را مجاور مثلث ABC بطریقی قرار میدهیم که ضلع DF بر مساوی خود AC منطبق شده دو مثلث در طرفین آن واقع شوند و نقطه B را بنقطه E وصل میکنیم حال چون دو زاویهٔ BAC و EDF حاده اند (ق ۱۵ نتیجه ۲ و ۱) زاویهٔ BAE کوچکتر از نیم سطح (دو قائمه) است و لذا خط BE ضلع AC یا امتداد آن را قطع میکند

و چون بالفرض BG = EF زاویه CBE مساوی زاویه CEB



خواهد بود ولی بالفرض $\widehat{ABC} = \widehat{AEC}$

ولهذا

$\widehat{ABC}+\widehat{CBE}=\widehat{AEC}+\widehat{CEB}$ در الف

$\widehat{ABC}-\widehat{CBE}=\widehat{AEC}-\widehat{CEB}$ در ب

یعنی $ABE = AEB$

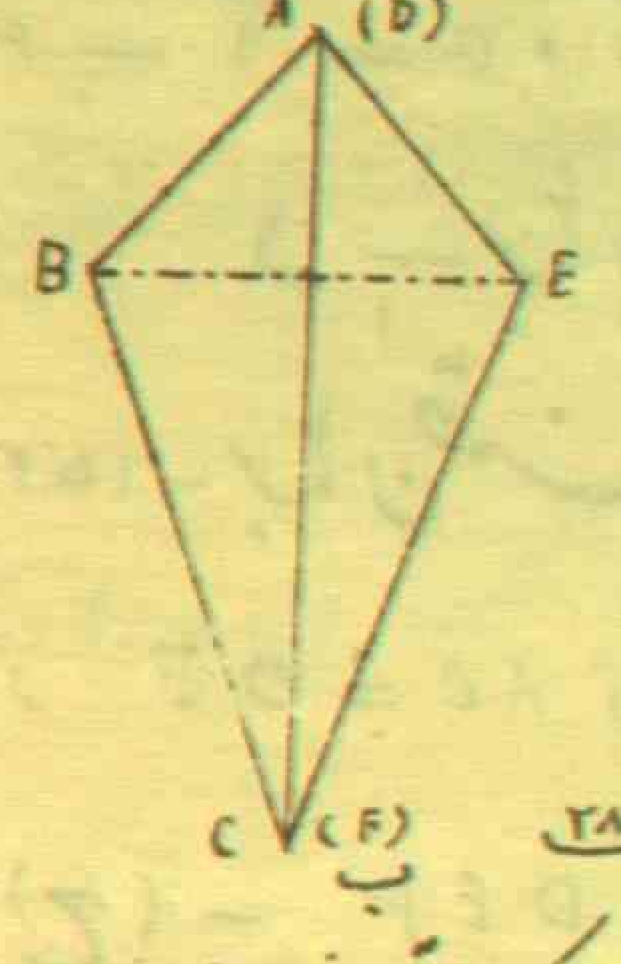
پس $AB = AE$ ق ۱۳

حال چون ملاحظه کنیم که دو مثلث متساوی الساقین

بر قاعدهٔ مشترک BE واقع شده‌اند

بقضیهٔ ۱۳ معلوم میشود که

$\triangle ABC = ACE$ وهو المطلوب



هرگاه خط BE بر نقطه C بگذرد برهان

خیلی ساده میشود و بر متعلم است که در این صورت برهان را اتمام کند و قضیهٔ محتاج الیه را

تشخیص دهد و قضیه را به بیان شرط تساوی دو مثلث قائم الزاویه ادا کند

۱۵۲ — برهان قضیهٔ ۱۰ — ف — $AB = DF$ و $AC = DF$ و $BC = EF$

(ح) $\triangle ABC = DEF$ س ۲۸

ب — دو مثلث را بطریق فوق قرار بدهیم و BE را وصل کنیم آنوقت

دو مثلث متساوی الساقین ABE و BCE بر قاعده مشترک BE

واقع شده دو مثلث مفروض بقضیه ۱۲ متساوی میشوند

از قضیه ۱۰ حل مسئله اصلی ذیل استنباط میشود

۱۵۴ - **مسئله اصلی** - میخواهیم بر نقطه A از مستقیم AB ش ۲۹ زاویه

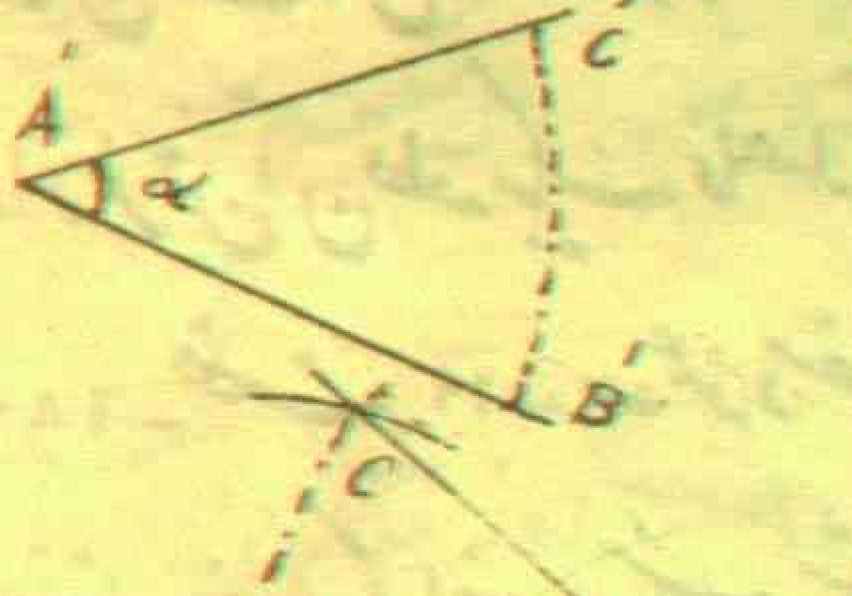
مساوی زاویه α رسم کنیم

حل - نقطه A را مرکز نموده با شعاع اختیاری دو جزء متساوی $A'B'$

و $A'C'$ را از دو ضلع زاویه α جدا میکنیم و از نقطه A با همین شعاع قوسی رسم

میکنیم که خط AB را بر نقطه B قطع میکند از این نقطه با شعاع BC قوس دیگر

رسم مینمائیم تا دایره مرسومه را بر نقطه



مانند C قطع نماید چون C را بر A

وصل کنیم مسئله حل میشود زیرا بقضیه ۱۰

$$\Delta ABC = A'B'C'$$

ه - موارد استعمال تساوی مثلثات

۱۵۵ - **تعریف** - هرگاه خطی بر وسط قطعه مستقیمی عمود شود آنرا عمود منصف

اصطلاح میکنیم

۱۵۶ - قضیه ۱۷ - هر نقطه از عمود منصف قطعه مفروض متساوی البعد است از طرفین آن قطعه

(برهان این قضیه بحالت ض ز ض از تساوی مثلثات راجع است زیرا چون نقطه مفروضه را بطرفین قطعه وصل کنیم دو مثلث حاصل میشود که تساوی آنها بحالت مزبور محقق میگردد)

۱۵۷ - قضیه ۱۸ - هر نقطه که از طرفین قطعه مستقیمی بیک فاصله باشد بر عمود منصف آن واقع است (عکس قضیه ۱۷)

(برهان راجع است بحالت ض ض ض)

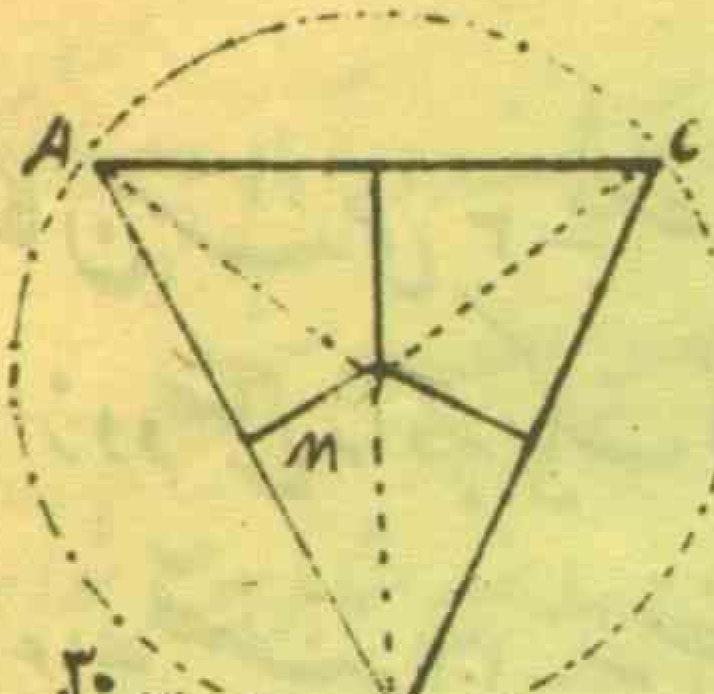
۱۵۸ - از ترکیب دو حکم ۱۷ و ۱۸ چنین نتیجه میشود

مکان هندسی ۲ - عمود منصف هر قطعه مستقیم مکان هندسی نقاطی است که از طرفین آن قطعه بیک فاصله باشد

۱۵۹ - قضیه ۱۹ - سه عمود منصف اضلاع مثلث بر یک نقطه تقاطع میکنند (متقاربند) که از سه رأس مثلث بیک فاصله است

برهان - فرض میکنیم نقطه M محل تلاقی دو عمود منصف دو ضلع AB و BC از مثلث ABC باشد ش ۳۰

بقضیه ۱۷ $MB = MA$



ش ۳۰

$$MB = MC$$

پس $MC = MA$

و بقضیهٔ ۱۸ نقطهٔ M بر عمود منصف ضلع AC واقع میشود

۱۶۰ - نتیجه - نقطهٔ M مرکز دایره ایست که بر سه نقطهٔ A و B و C مرور کند پس معلوم میشود که :

دایرهٔ مارّه بر سه نقطه غیر واقعه بر یک استقامت منحصر بفرد و کاملاً مشخص است

۱۶۱ - تعریف - فاصله یا بُعد نقطهٔ مفروضه از خط مفروض عبارت از طول عمودیست که از آن نقطه بر این خط فرود آید

۱۶۲ - قضیهٔ ۲۰ - هر نقطهٔ منصف الزاویه متساوی البعد است از دو ضلع زاویه

(از دو کلمهٔ (منصف الزاویه) و (بُعد) که فرض قضیه را بیان میکند بوسیلهٔ اثبات تساوی دو مثلث بدست میآید)

۱۶۳ - قضیهٔ ۲۱ - هر نقطه که از دو ضلع زاویه متساوی البعد باشد بر منصف الزاویه واقع است (عکس قضیهٔ ۲۰)

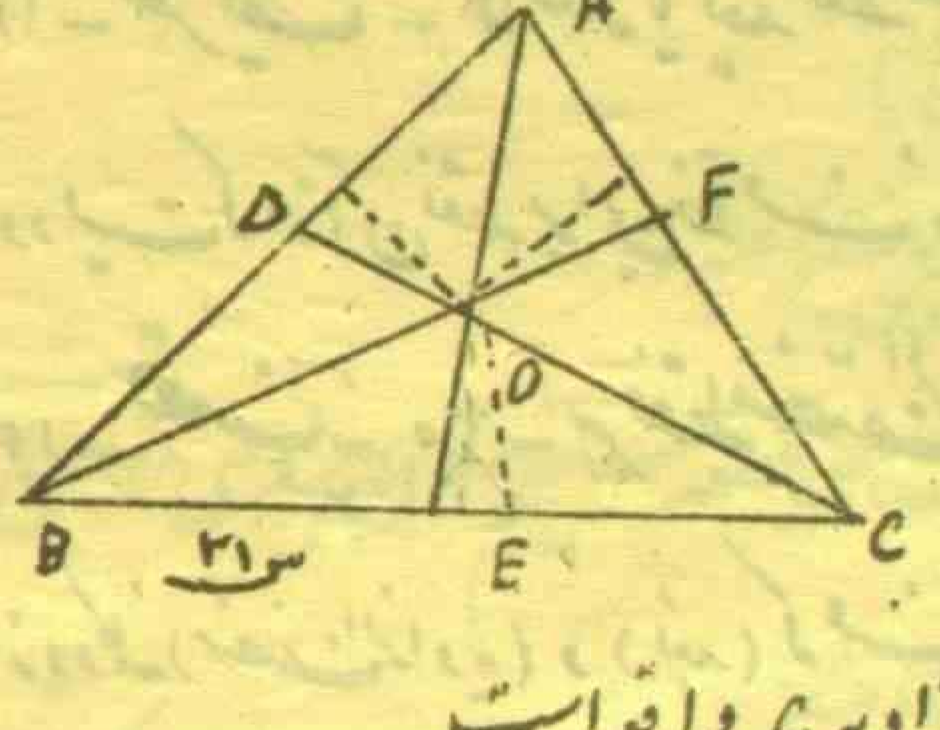
(چون نقطهٔ مفروضه را براس زاویه وصل کنیم دو مثلث قائم الزاویهٔ متساوی حاصل میگردد)

۱۶۴ - از ترکیب دو قضیهٔ ۲۰ و ۲۱ چنین نتیجه میشود

مکان هندسی ۳ – منصف الزاویه مکان هندسی نقاطی است که از دو ضلع زاویه بیک فاصله باشند

۱۶۵ – قضیهٔ ۲۲ – سه منصف الزاویه هر مثلث بر یکنقطه که از سه ضلع متساوی البعد است تلاقی کنند

برهان – فرض کنیم نقطهٔ O محل تلاقی دو منصف دو زاویهٔ A و B از مثلث ABC س ۳۱ باشد OD و OE و OF فواصل این نقطه از سه ضلع مثلث است



بقضیه ۲۰ $OD = OF$

و $OD = OE$

پس $OE = OF$

ولذا بقضیهٔ ۲۱ نقطهٔ O بر منصف الزاویه C واقع است

۱۶۶ – فرع – بهمین طریق مبرهن میشود که هر منصف الزاویهٔ داخلی با دو منصف زاویه خارجهٔ مثلث که رأس مشترک ندارند بر یکنقطه تلاقی میکنند که از اضلاع مثلث بیک فاصله است

۱۶۷ – نتیجه – وقتی سه خط دو بدو تقاطع کنند (مثلث تولید نمایند) همواره میتوان چهار نقطه یافت نه بیش که هر کدام از سه خط مفروض بیک فاصله باشند

۱۶۸ – تعریف – عمودیکه از رأس مثلث بر ضلع مقابل فرود آید به ارتفاع

مثلث موسوم است و آن را متعلق بضلعی دانیم که بر آن فرود آمد (علامت ارتفاع را حروف h قرار میدهیم و h_a ارتفاع متعلق بضلع a است)

۱۶۹ـ **تعریف** ـ خطی که از رأس مثلث بوسط ضلع مقابل وصل شود به مثلث موسوم است (علامت میانه را m قرار میدهیم m_a متعلق بضلع a است)

تمرینات

مسئله ۱ ـ دو مثلث متساوی الساقین در حالات ذیل متساوی میشوند مطلوبست برهان آنها

۱) هرگاه در قاعده و دو زاویهٔ رأس متساوی باشند

ب) هرگاه در قاعده و ارتفاع متعلق بساق متساوی باشند

ج) « « « « بقاعده «

د) « « یک ساق « « بآن « «

ه) « « « « بقاعده « «

مسئله ۲ حکم ـ دو مثلث متساوی الاضلاع که در یک ارتفاع متساوی باشند متساویند (بچه دلیل)

مسئله ۳ ـ میخواهیم بدون استعانت نقاله مثلثی از معلومات a و b و c

رسم کنیم

مسئله ۴ - مثلثی از a و b و α رسم کنید بفرض اینکه $b < a$

مسئله ۵ - مثلثی از a و b و α رسم کنید بفرض اینکه $b > a$ باشد (دو جواب یا یک جواب)

مسئله ۶ - مثلثی متساوی الساقین از قاعده و ارتفاع متعلق بدان رسم کنید

مسئله ۷ - مثلثی متساوی الساقین از قاعده و ارتفاع وارد بر یک ساق رسم کنید

مسئله ۸ - مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید ($\widehat{h, g}$ علامت زاویه ایست که بین دو خط h و g تولید شده)

۱ - $a = 10$ و $b = 7$ ، $m_a = 6$

۲ - $a = 8$ ، $b = 5$ ، $\widehat{a, m_a} = 45$

۳ - $b = 8$ ، $m_a = 6$ ، $\widehat{b, m_a} = 45$

۴ - $b = 6$ ، $\gamma = 75$ ، $\widehat{a, m_a} = 45$

۵ - $a = 7$ ، $m_a = 5$ ، $\beta = 67.5$

مسئله ۹ - مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید (منصف الزاویه‌ی α ضلع a را بدو قطعه قسمت میکنند آنرا که مجاور رأس B است b_1 و آنرا که مجاور رأس C است c_1 علامت قرار میدهیم)

۱ـ v_α = ۷ b = ۵ s_b = ۴

۲ـ v_α = ۵ s_b = ۳ γ = ۷۵

۳ـ v_α = ۹ s_c = ۵ β = ۱۰۵

۴ـ s_b = ۱۰ b = ۸ α = ۶۰°

۵ـ v_α = ۸ s_b = ۶ α = ۱۲۰°

مسئله ۱۰ـ مثلثی از معلومات ذیل را رسم کنید (h_a ضلع a را به دو قسمت میکند که آن را مجاور رأس C است p_b و آن را که مجاور رأس B است p_c علامت میگذاریم)

۱ـ b = ۹ p_b = ۷ c = ۱۱

۲ـ b = ۸ c = ۹ h_a = ۷

۳ـ b = ۶ h_a = ۵ α = ۷۵°

۴ـ p_b = ۳ p_c = ۴ β = ۵۴

۵ـ a = ۱۱ p_b = ۵ γ = ۵۲٫۵

۶ـ p_b = ۳ β = ۴۵° γ = ۷۵

۷ـ p_b = ۷ α = ۵۰٫۵° β = ۶۲٫۵

۸ـ p_b = ۵ b = ۷ m_a = ۸

۹ — $b = ۳^{\text{سم}}$ $\gamma = ۷۵°$ $\beta\gamma = ۱۳$

مسئله ۱۱ — مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید

۱ — $a = ۲^{\text{سم}}$ $b + c = ۱۱$ $\alpha = ۷۵$

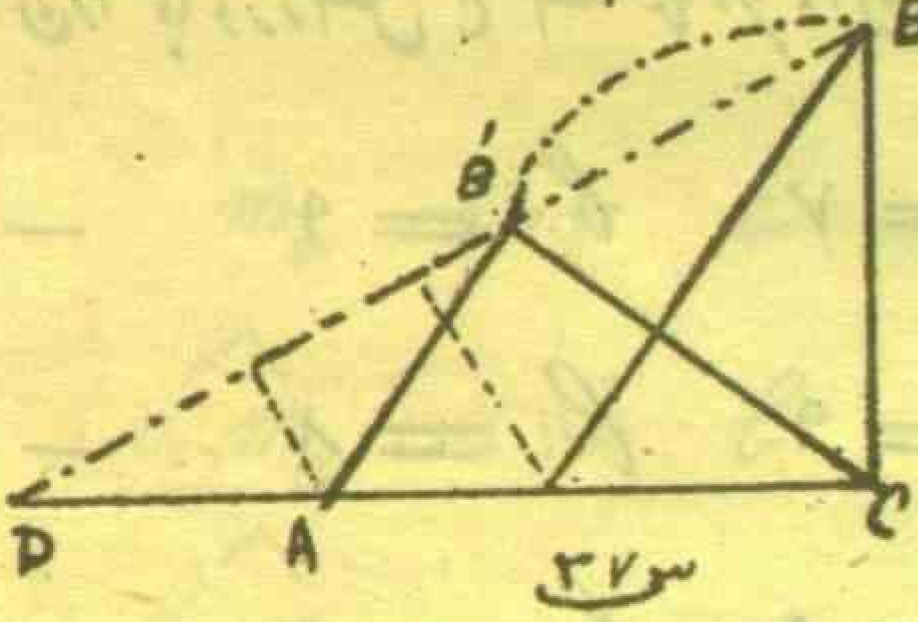
حل — چون در مثلث ABC ۳۲سم کمیت $b + c$ یعنی AC + AB را

که CD باشد تشکیل نموده نقطه D را به B وصل نمائیم دیده میشود که مثلث ADB

متساوی الساقین است و بنابراین $ADB = \frac{\alpha}{2}$ (قضیه ۱۱ نتیجه ۱) بطوری که از مثلث

DBC دو ضلع و زاویه مقابل یکی از آن دو معلوم است و از اینجا طریق رسم

ذیل حاصل میشود



رسم — خط CD را مساوی

$b + c$ رسم نموده بر نقطه D زاویه

مساوی $\frac{\alpha}{2}$ بسازیم و از مرکز C با شعاع a قوسی مرور میدهیم که DB را

قطع نموده نقطه B را تعیین میکند و چون بر وسط DB عمودی اخراج کنیم (یا

روی DB را بر نقطه B زاویه مساوی $\frac{\alpha}{2}$ بسازیم) راس سوم

A از مثلث مجهول پیدا میشود و از وصل AB (یا A′B′) مثلث مطلوب حاصل میگردد

۲ — $a = ۶^{\text{سم}}$ $b + c = ۹^{\text{سم}}$ $\alpha = ۱۰۵°$

۳ ـ $a = 5$ $b + c = 11$ $\beta = 105^\circ$

۴ ـ $b + c = 12$ $\alpha = 45^\circ$ $\beta = 67.5^\circ$

۵ ـ $b + c = 15$ $\beta = 52.5^\circ$ $\gamma = 75^\circ$

۶ ـ $b + c = 10$ $\alpha = 60^\circ$ $\gamma = 15^\circ$

مسئله ۱۲ ـ مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید

۱ ـ $a = 7$ و $b - c = 3$ و $\alpha = 52.5^\circ$

حل ـ چون مانند مسئله ۱۱ استدلال کنیم معلوم میشود که از مثلث DBC س ۳۳ دو ضلع و زاویه مقابل بضلع اعظم معلوم است و راس C از مثلث مطلوب بر نقطه تلاقی عمود منتصف BD و امتداد DC واقع است

۲ ـ $a = 8$ $b - c = 3$ $\gamma = 67.5^\circ$

۳ ـ $b - c = 5$ و $\alpha = 67.5^\circ$ $\beta = 75^\circ$

۴ ـ $b - c = 4$ و $\beta = 52.5^\circ$ $\gamma = 75^\circ$

۵ ـ $b - c = 3$ و $\alpha = 52.5^\circ$ $\beta - \gamma = 7.5^\circ$

مسئله ۱۳ ـ مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید

۱ - $a+b+c=15$ و $\beta=45$ و $\gamma=67.5$

حل - چون در مثلث ABC ش ۳۴ مجموع سه ضلع را باین طریق تشکیل کنیم که BC را از طرف راست باندازهٔ AC و از طرف چپ باندازهٔ AB امتداد دهیم آنوقت دو نقطهٔ D و E را به A وصل کنیم دیده میشود که چون $BA=BD$ پس $ADB=\frac{\beta}{2}$ و چون $CA=CE$ پس $AEC=\frac{\gamma}{2}$ و بنابراین از مثلث AED دو زاویه و ضلع بینهما معلوم است دو رأس B و C از مثلث مطلوب دو نقطه تلاقی ED با دو عمود منصف AD و AE خواهد بود

۲ - $a+b+c=12$ $\alpha=45$ $\beta-\gamma=22.5$

۳ - $a+b+c=18$ $\gamma=75$ $\alpha-\beta=15$

و - بعضی احکام مثلث که از تساوی مثلثات استنباط میشود

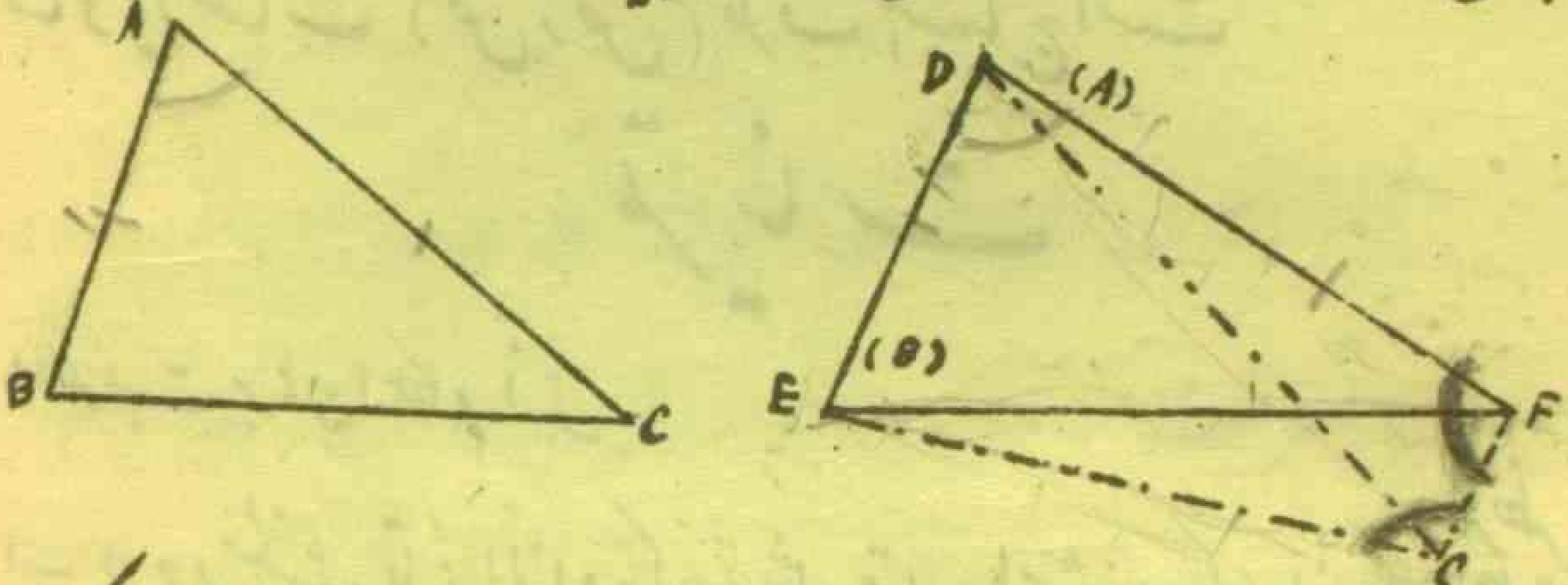
۱۷۰ - قضیه ۲۳ - هرگاه در دو مثلث دو ضلع نظیر بنظیر متساوی لیکن زاویهٔ بینهما متساوی نباشند ضلع مقابل بزاویهٔ اعظم اطول خواهد بود از ضلعی که مقابل است بزاویهٔ کوچکتر

ف - ش ۳۵ $\hat{D} > \hat{A}$ و $DF=AC$ و $DE=AB$

ح ـ $EF > BC$

ب ـ بفرض آنکه $AC > AB$ باشد مثلث ABC را بر مثلث DEF چنان منطبق میکنیم که AB بر مساوی خود DF واقع شود

چون DF $\widehat{BAC} > \widehat{EDF}$ ضلع AC مابین دو ضلع زاویهٔ EDF میافتد



و زاویهٔ ECF را که از وصل نقطه C به F حاصل شده بدو قسمت میکند

پس $\widehat{ECF} > \widehat{DCF}$

لیکن چون مثلث DCF متساوی الساقین است $\widehat{DCF} > \widehat{EFC}$

اما $\widehat{DFC} > \widehat{EFC}$ پس $\widehat{DCF} > \widehat{EFC}$

و بطریق اولی $\widehat{ECF} > \widehat{EFC}$

و لذا بقضیهٔ ۱۴ $E\,E > FC$ یا $EF > BC$ و هو المطلوب

۱۲۱ ـ تنبیه ـ اگر $AB > AC$ باشد AC را بر DF منطبق میکنیم و بر متعلم است که علت این ضرورت را بگوید

۱۷۲ — قضیهٔ ۲۴ — هرگاه در دو مثلث دو ضلع نظیر بنظیر مساوی اما ضلع سوم مختلف باشند زاویهٔ مقابل بضلع اطول اعظم است (عکس قضیهٔ ۲۳)

طریقهٔ برهان — قضیه ببرهان خلف ثابت میشود و قضیهٔ ۲۳ با یکی از حالات تساوی مثلثات (ض ز ض) طرف احتیاج است

تمرینات

مطلوبست برهان احکام ذیل

۱ — در دو مثلث قائم الزاویه که وترشان مساوی باشند هریک از دو ضلع دیگر نظیر بنظیر آنکه بزاویهٔ حادهٔ اعظم مقابل است اعظم است

طریقهٔ برهان — اگر دو مثلث راچنان بر یکدیگر منطبق کنیم که دو وتر منطبق شد زاویهٔ کوچکتر قسمتی از زاویهٔ بزرگتر راپوشاند بملاحظهٔ زاویهٔ قائمه منفرجه بودن یک زاویه محقق میشود

۲ — در دو مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الوترین هریک از دو ضلع اعظم نظیر بنظیر مقابل است بزاویهٔ حادهٔ اعظم (برهان خلف)

۳ — دو مثلث قائم الزاویه که یک ضلع زاویهٔ قائمه در آنها متساوی باشد وتر مثلثی که این ضلع در آن مثلث بزاویهٔ اعظم مجاور است اطول خواهد بود

۴ — از دو مثلث متساوی الساقین متساوی القاعده آنکه زاویهٔ راسش کوچکتر است

ساقش اطول است

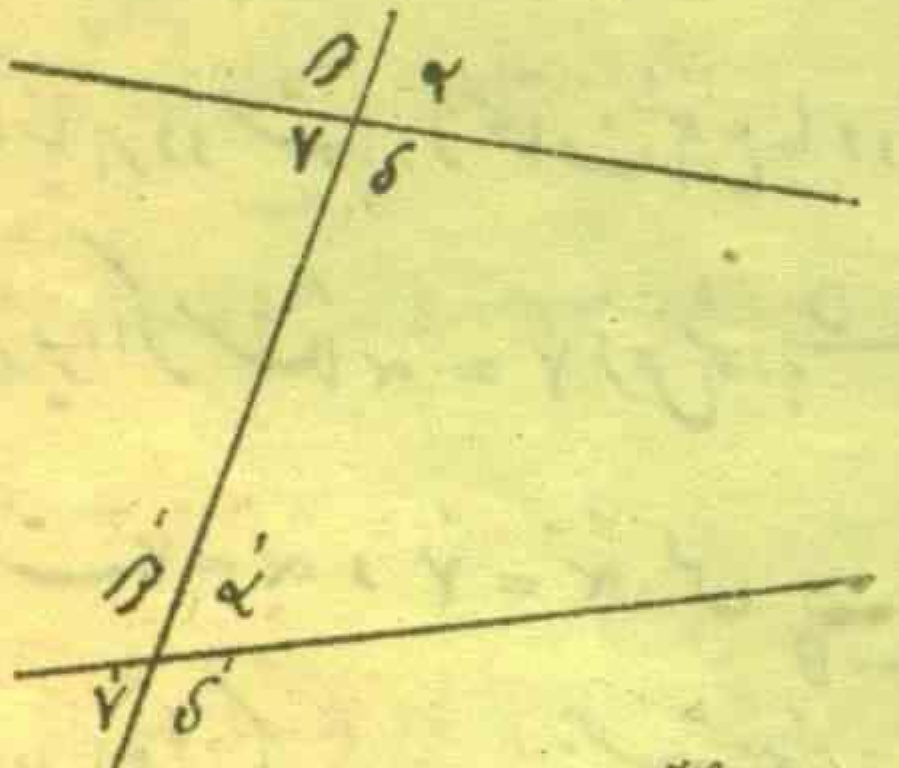
۵- از دو مثلث متساوی الساقین متساوی الساق آنکه زاویهٔ راسش اعظم است قاعده‌اش اطول است

فصل چهارم - اقسام ذوات اربعة اضلاع

۲ - احکام خطوط متوازیه

س ۳۶

۱۷۳ - **تعریف** - وقتی دو خط را خط ثالثی قطع کند هشت زاویه تولید میشود

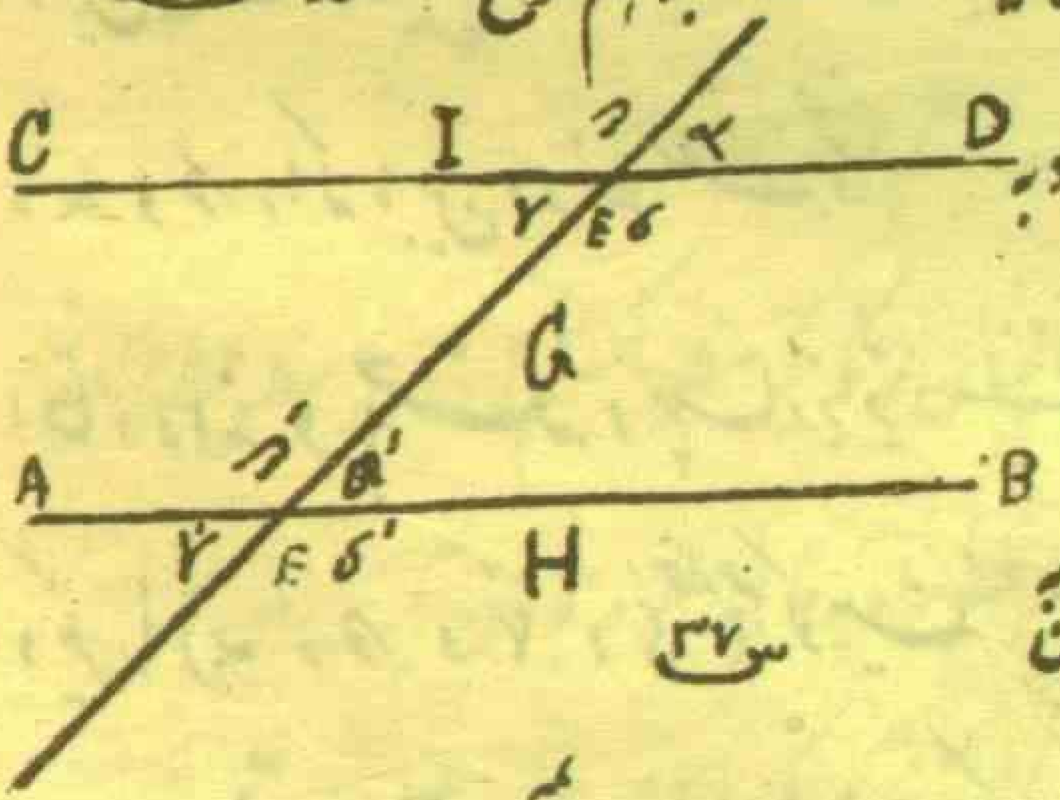


از این هشت زاویه چهار زاویه [illegible] و [illegible] و [illegible] و [illegible] را که مابین دو خط مفروض افتاده اند **داخله** و چهار زاویهٔ دیگر را ([illegible] و [illegible] و [illegible] و [illegible]) خارجه گویند س ۲۶

۱۷۴- **تعریف** - هر دو زاویه را که در یک طرف قاطع بوده و راس مشترک نداشته باشند **متقابله** گوئیم پس زاویهٔ متقابله بر سه قسمند اول متقابلهٔ داخله ([illegible] و [illegible] یا [illegible] و [illegible]) دوم متقابله خارجه ([illegible] و [illegible] یا [illegible] و [illegible]) سوم متقابلهٔ داخل و خارج ([illegible] و [illegible] و [illegible] و [illegible] و [illegible] و [illegible] و [illegible] و [illegible])

۱۷۹ - **تعریف** - هر دو زاویه که در دو سمت مختلف قاطع افتاده و راس مشترک نداشته باشند نسبت بیکدیگر **متبادله** نامیده میشوند. پس زوایای متبادله نیز بر سه قسمند اول متبادلهٔ داخله (۲ و ۸ و ۶ و ۳) دوم متبادلهٔ خارجه (۸ و ۲ و ۳ و ۶) سوم متبادلهٔ داخل و خارج (۸ و ۳ - ۳ و ۸ - ۲ و ۶ - ۶ و ۲)

۱۷۶ - **فرع** - هرگاه دو زاویهٔ متبادلهٔ هم نوع یا دو متقابلهٔ مختلف النوع متساوی باشند اولاً هر دو متبادلهٔ هم نوع یا دو متقابلهٔ مختلف النوع متساویند ثانیاً هر دو متبادلهٔ مختلف النوع یا دو متقابلهٔ هم نوع مکملند ش ۳۷



زیرا اگر مثلاً ۸ = ۲ فرض شود به ق ۲ = ۸ و ۲ = ۸ پس معلوم میشود که ۲ = ۸ و همچنین به ق ۱ ۲ = ۲ + ۶ ولی چون ۲ = ۸ پس ۲ = ۸ + ۶ وقس علیهذا

۱۷۷ - **تعریف** - هرگاه دو خط واقع در یک سطح مستوی هرگز تلاقی نکنند هر چند از طرفین بی‌نهایت ممتد شوند آنها را متوازی (||) گویند

۱۷۸ – وجود خطوط متوازیه از قضیهٔ ذیل محقق میشود

قضیهٔ ۲۵ – دو خط عمود بر خط ثالث دو خطند متوازی

برهان – اگر چنین دو خط متقاطع شوند لازم میآید که از نقطه تقاطع دو عمود بر یک خط مرور کرده باشد و محال بودن این امر را سابقاً مبرهن نموده ایم

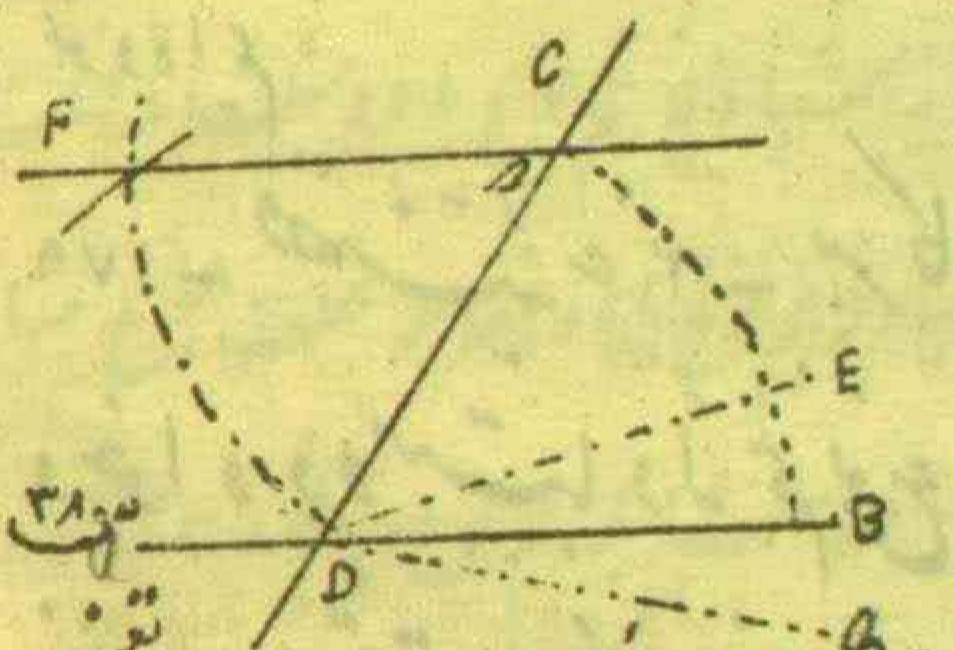
۱۷۹ – قضیهٔ ۲۶ – هرگاه دو خط را خط ثالثی قطع کند وخواه دو متبادلهٔ هم نوع یا دو متقابلهٔ مختلف النوع متساوی شوند خواه دو متقابلهٔ هم نوع یا دو متبادلهٔ مختلف النوع مکمل گردند دو خط مفروض متوازیند

برهان – بر هر یک از فروض بموجب فرع ۱۷۶ دو زاویهٔ متبادلهٔ داخله متساوی میشوند پس اثبات حکم برای همین یک حالت کفایت میکند ولهذا فرض میکنیم در شکل ۳۷ = ۱ از نقطه G مفروضه بر قطعه EF عمود GH را بر AB فرود میآوریم که امتداد آن CD را بر نقطه I قطع میکند حال چون بالفرض $\widehat{EGH} = \widehat{FGI}$ و ۲ = ۱

(متقابله براس) لازم میآید که دو زاویهٔ FHG و FIG متساوی باشند نمره ۱۰۵ اما $\widehat{FHG}$ قائمه است پس $\widehat{FIG}$ نیز قائمه و $CD \perp HI$ و بنابراین به قضیه ۲۵ $AB \parallel CD$

۱۸۰ـ مسئلهٔ اصلی ــ میخواهیم از نقطهٔ مفروضه C در خارج مستقیم AB (شکل ۳۸) خطی بموازات AB رسم کنیم

حل ــ بر نقطه C خطی اختیاری مرور میدهیم تا خط AB را قطع کند و چهار زاویه تولید نماید آنوقت بر رأس C روی قاطع زاویه مساوی یکی از چهار زاویهٔ حاصله بطوری رسم مینمایم که متبادله هم نوع یا متقابلهٔ مختلف النوع باشند ضلع دوم این زاویه جواب مسئله است



هرچند مرتبه ترسیم متوازی را بر نقطهٔ معین C بواسطهٔ تغییر امتداد قاطع یا تغییر زوایای مرسومه تکرار کنیم همواره همان خط اول حاصل میگردد و از اینجا اصل موضوع ذیل نتیجه میشود

۱۸۱ـ اصل موضوع ــ بر نقطهٔ مفروضه در خارج خط مفروض یک خط بموازات آن مرور میکند نه بیش (اصل موضوع حکمی است محقق که نتوان برهانی بر آن اقامه نمود و فقط تجربه به آن را ثابت کرده باشد و اصل موضوع فوق را باقلیدس نسبت میدهند)

۱۸۲ـ قضیهٔ ۲۷ ــ هرگاه دو متوازی را خط ثالثی قطع کند

اولاً هر دو زاویهٔ متبادلهٔ هم نوع یا دو بدو متقابلهٔ مختلف النوع متساویند

ثانیاً هر دو زاویهٔ متقابلهٔ هم نوع یا دو متبادلهٔ مختلف النوع مکملند (عکس ۲۶)

برهان - تمام احکام قضیه را میتوان بمناسبت فرع نمرهٔ ۱۷۶ بتساوی دو زاویهٔ متبادلهٔ داخله راجع نمود پس کافی است ثابت کنیم که $\beta = \alpha$ ص ۳۸

اگر $\beta < \alpha$ فرض شود بواسطهٔ خط DE جزو EDC را از α باندازهٔ β جدا میکنیم پس بر ق ۲۶ DE ‖ CF و اگر $\beta > \alpha$ فرض شود بوسیلهٔ خط DG جزو BDG را بر α میافزائیم تا مساوی با β گردد و باز به ق ۲۶ BDG ‖ CF خواهد بود لیکن بالفرض AB ‖ CF و لهذا بر هر دو فرض لازم میآید که بر نقطهٔ D دو خط بموازات CF مرور نماید و این امر بموجب اصل موضوع اقلیدس محال است

۱۸۳ - فرع - دو خط موازی با خط ثالث خود متوازیند

طریقهٔ برهان - قاطعی رسم نموده بوسیلهٔ ق ۲۷ فرض ق ۲۶ را در دو خطی که باید توازی آنها اثبات شود استنباط میکنیم

۱۸۴ — فرع — هرگاه خطی بریکی از دو متوازی عمود شود بر دیگری نیز عمود است

طریقهٔ برهان — از دو زاویهٔ متبادلهٔ داخله یکی قائمه است

۱۸۵ — فرع — هرگاه اضلاع دو زاویهٔ متوازی و ممتد در جهت واحد یا خلاف جهت باشند آن دو زاویه متساویند

طریقهٔ برهان — دو ضلع غیر متوازی زاویهٔ تشکیل میدهند که بحکم ق ۲۷ با دو زاویهٔ مفروضه مساوی است

۱۸۶ — فایده — اگر دو ضلع متوازی در یک جهت و دو ضلع دیگر در خلاف جهت ممتد باشند دو زاویه مکمل خواهند بود (چرا)

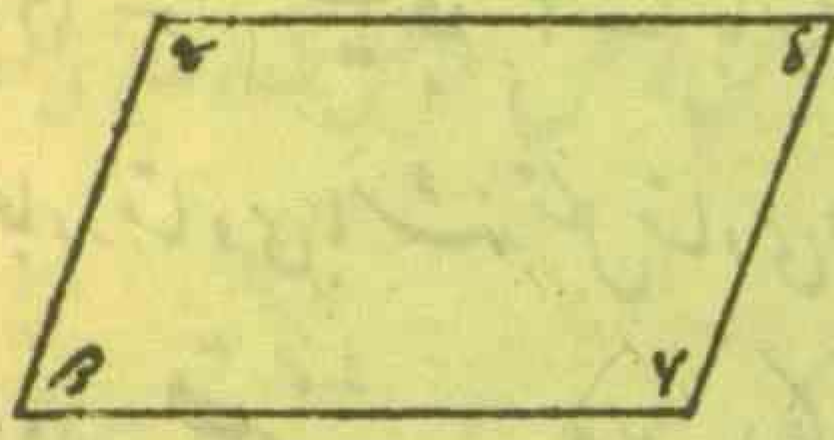
۱۸۷ — فرع — هرگاه اضلاع دو زاویه بریکدیگر عمود باشند دو زاویه متساوی یا مکمل خواهند بود

طریقهٔ برهان — از راس یکی دو خط بموازات دو ضلع دیگری رسم میکنیم زاویهٔ این دو خط از طرفی بفرع ۱۸۵ با زاویهٔ دوم مساوی است و از طرف دیگر چون بفرع ۱۸۴ دو ضلعش بر دو ضلع

زاویهٔ اول عمود است باین زاویه متمم مشترک دارد ولذا مساوی با آنست

ب - احکام متوازی الأضلاع

۱۸۸ - تعریف - متوازی الأضلاع ذوار بعة اضلاعی است که اضلاعش دو بدو متوازی باشند س ۳۹



۱۸۹ - قضیه ۲۸ - در هر متوازی الأضلاع اولا دو زاویهٔ که یک ضلعشان مشترک است مکمل یکدیگرند ق ۲۷

ثانیاً دو زاویهٔ مقابل یعنی آنها که ضلع مشترک ندارند متساویند (نمرهٔ ۱۸۵)

ثالثاً هر قطر شکل را بدو مثلث متساوی منقسم میکند (بملاحظهٔ تساوی دو زاویهٔ متبادله تساوی دو مثلث بحالت زض ز راجع میشود)

رابعاً هر دو ضلع متوازی متساویند (از وصل قطر بحکم سابق دو مثلث متساوی حاصل میگردد)

خامساً دو قطر منصف یکدیگرند (نظر بحکم چهارم وتساوی زوایای

متبادله تساوی دو مثلث بحالت ز ض ز محقق و حکم ثابت میشود

۱۹۰ - **نتیجه ۱** - بنا بر حکم اول و دوم اگر در متوازی الاضلاع یک زاویه قائمه باشد سه زاویه دیگر نیز قائمه اند

۱۹۱ - **نتیجه ۲** - بنا بر حکم چهارم وقتی در متوازی الاضلاع دو ضلع مجاور متساوی باشند شکل متساوی الاضلاع است

۱۹۲ - قضیه - ۲۹ - (عکس ۲۸) شکل ذوار بعة اضلاع متوازی الاضلاع است :

اولاً هرگاه دو زاویهٔ متقابل متساوی باشند

(چون بفرض $\gamma = \alpha$ ق ۳۹ و $\delta = \beta$ پس $\alpha + \beta = \gamma + \delta$

ولی مجموع چهار زاویه ذوار بعة اضلاع ۴ قائمه است ——— و بنابر این قائمه $۲ = \delta + \gamma = \beta + \alpha$ و به ق ۲۶ حکم ثابت میشود)

ثانیاً هرگاه قطر شکل را بدو مثلث متساوی تجزیه کند

(تساوی دو زاویهٔ متبادلهٔ داخله وسیلهٔ اثبات حکم میشود)

ثالثاً هرگاه هر دو ضلع متقابل متساوی باشند

از وصل قطر دو مثلث متساوی بحالت ض ض ض حاصل و برهان

بحکم سابق برمیگردد)

رابعاً هرگاه فقط دو ضلع مقابل متساوی و متوازی باشند (از وصل قطر دو مثلث متساوی بحالت ض ز ض حاصل شده تساوی دو زاویهٔ متبادلهٔ داخله محقق میشود)

خامساً هرگاه دو قطر منصف یکدیگر باشند (باز تساوی دو مثلث بحالت ض ز ض مساوی بودن دو زاویهٔ متبادلهٔ داخله را اثبات میکند)

۱۹۳ — **نتیجهٔ ۱** — هرگاه دو نقطهٔ واقعه در یک طرف خطی مستقیم از این خط بیک فاصله باشند خط واصل بین آنها با خط مفروض موازی است

۱۹۴ — **نتیجهٔ ۲** — دو خط متوازی همه جا بیک فاصله اند

از ترکیب این دو نتیجه حکم ذیل استنباط میشود

۱۹۵ — **مکان هندسی ۴** — خطی که بفاصلهٔ h بموازات مستقیم AB مرور کند مکان هندسی نقاطی است که در یکطرف AB بفاصلهٔ h از AB واقع باشند

ج — احکام متوازی الأضلاعهای مخصوصه

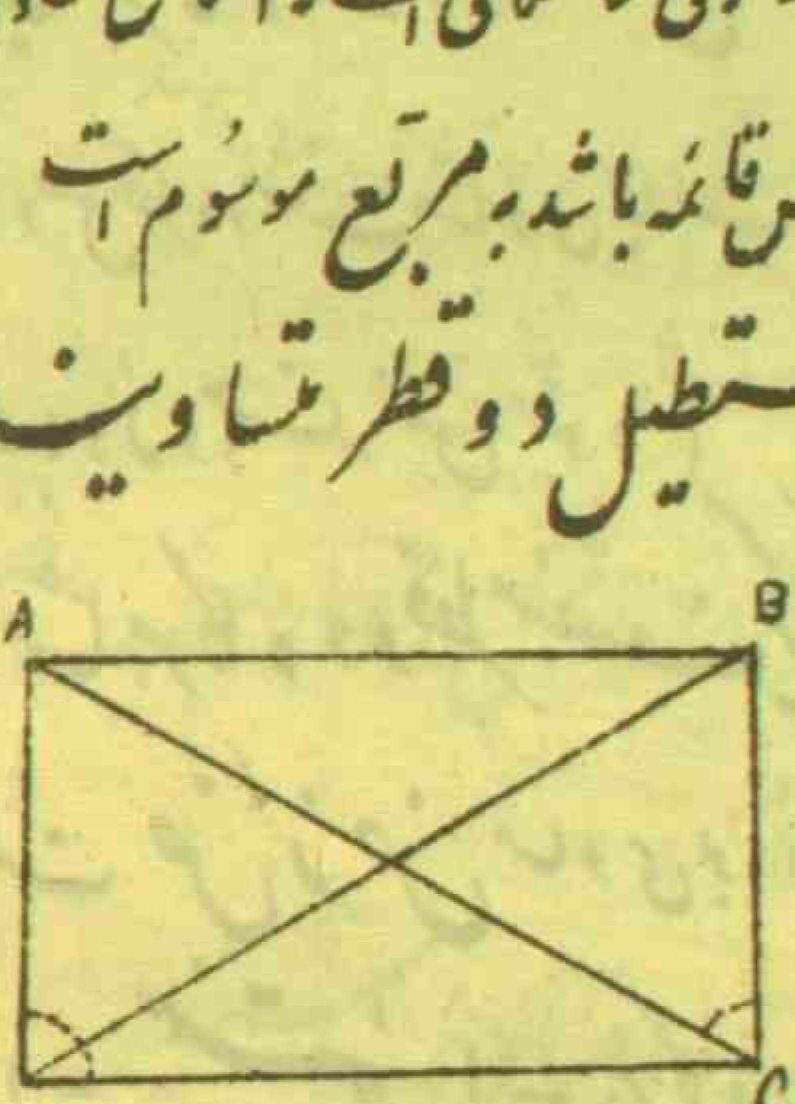
۱۹۶ — **تعریف** — مربع مستطیل یا بالاختصار مستطیل یا سطح متوازی الاضلاع

که زوایایش قائمه باشند

۱۹۷ ـ **تعریف** ـ معین یا لوزی متوازی الاضلاعی است که اضلاعش متساوی باشند

۱۹۸ ـ **تعریف** ـ معینی که زوایایش قائمه باشد به مربع موسوم است

۱۹۹ ـ **قضیهٔ ۳۰** ـ در مستطیل دو قطر متساویند



زیرا دو مثلث قائم الزاویهٔ ADC و BDC متساویند ض ز ض

۲۰۰ ـ **فرع** ـ در متوازی الاضلاع قطر واصل بین دو زاویهٔ حاده اطول است برای اثبات ق ۲۳ استعمال میشود)

۲۰۱ ـ **قضیهٔ ۳۱** ـ در لوزی دو قطر بریکدیگر عمودند

(زیرا هر قطر قاعدهٔ مشترک دو مثلث متساوی الساقین است ق ۱۶)

۲۰۲ ـ **قضیهٔ ۳۲** ـ وقتی در متوازی الاضلاع دو قطر متساوی باشند شکل مستطیل است (تساوی دو مثلث که در یکضلع مشترکند بحالت ض ض ض وسیلهٔ اثبات تساوی دو زاویهٔ مکمل میشود)

۲۰۳ ـ **قضیهٔ ۳۳** ـ وقتی در متوازی الاضلاع دو قطر بریکدیگر عمود باشند شکل لوزی است (تساوی دو مثلث قائم الزاویه بحالت ض ز ض وسیلهٔ

اثبات حکم است

۲۰۴ - **نتیجه** - از ق ۳۲ و ۳۳ وقتی در متوازی الاضلاع دو قطر متساوی و عمود بر یکدیگر باشند شکل مربع است

د - بعضی موارد استعمال احکام سابقه

۲۰۵ - **تعریف** - مرکز کثیر الاضلاع نقطه ایست در درون آن که هر خطی بر آن مرور نموده و از طرفین بمحیط شکل منتهی شود بر این نقطه تنصیف گردد

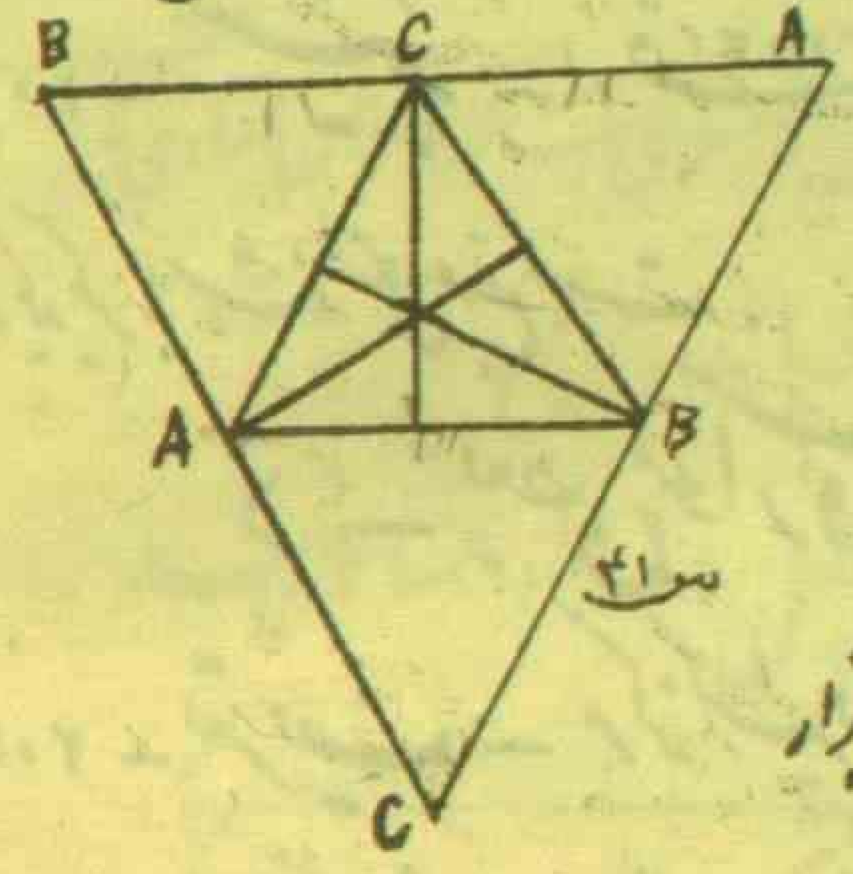
۲۰۶ - **فرع ۱** - در متوازی الاضلاع نقطه تقاطع دو قطر مرکز است زیرا اگر از این نقطه در جهت اختیاری خطی رسم کنیم جزئی از آن که در داخل متوازی الاضلاع ا ثبت بر نقطه تقاطع دو قطر نصف میشود (اثبات بواسطه تساوی دو مثلث بحالت زض ز)

۲۰۷ - **فرع ۲** - در مستطیل مرکز از چهار رأس بیک فاصله است و بعبارة اخری دائره که از این مرکز بشعاع نصف قطر مستطیل رسم شود بر رؤس آن مرور میکند

۲۰۸ - **فرع ۳** - مرکز لوزی از چهار ضلع آن بیک فاصله است زیرا دو قطر لوزی منصف الزاویه های شکلند

۲۰۹ - **فرع ۴** - مرکز مربع هم از چهار ضلع و هم از چهار رأس بیک فاصله واقع است

۲۱۰ - قضیه ۳۴ - سه ارتفاع هر مثلث بر یک نقطه تقاطع میکنند (متقارب‌اند)



برهان - از رؤس مثلث ABC س ۴۱

سه خط بموازات سه ضلع رسم میکنیم تا مثلث

$A'B'C'$ حاصل شود پس ملاحظه میکنیم که بر

هر ضلع مثلث دو متوازی الاضلاع داخلشده از اینقرار

بر ضلع AB دو متوازی الاضلاع ABCB′ و BACA′

« « BC « « CBAB′ و BCAC′

« « AC « « ACBC′ و CABA′

وبنابراین معلوم میشود $CA' = CB' (= AB)$ و $AC' = AB' (= BC)$

و $BA' = B'C (= AC)$ A و B و C براوساط اضلاع مثلث

$A'B'C'$ واقعند بطوریکه ارتفاعات مثلث ABC عمودهای منصف

اضلاع $\triangle A'B'C'$ خواهند بود و سابق ثابت کرده‌ایم که سه خط اخیر

متقاربند فثبت المطلوب

۲۱۱ - قضیه ۳۵ - خطی که از وسط یک ضلع مثلث بموازات

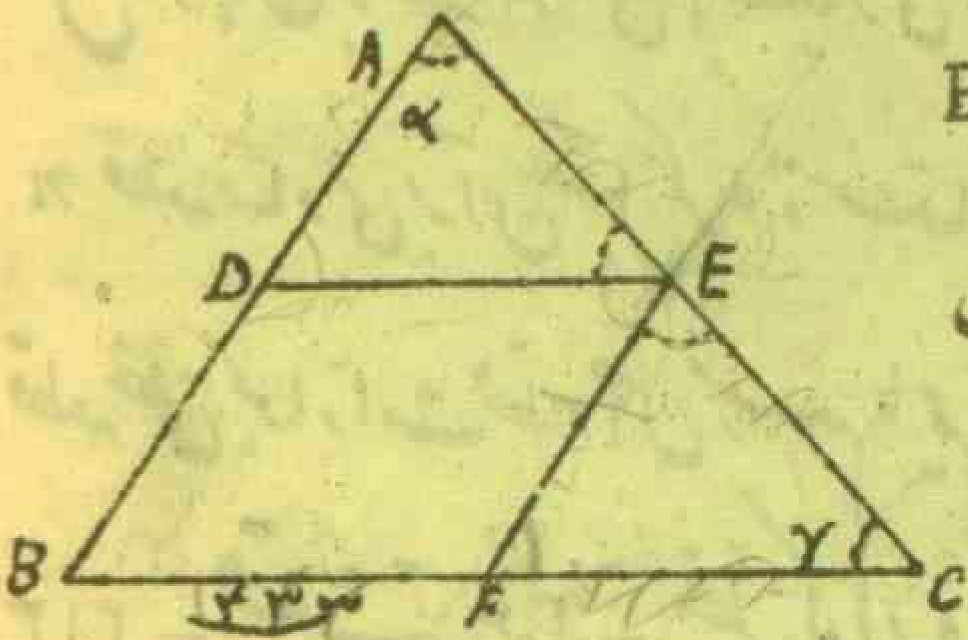
ضلع دیگر رسم شود ضلع سوم را نصف میکند و جزئی از آن

که در داخل مثلث میافتد نصف ضلع دوم است

ف س ۴۲ — $BD = AD$ و $DE \parallel BC$

ح — $AE = CE$ و $DE = \frac{BC}{۲}$

ب — چون EF را بموازات AB رسم کنیم متوازی الاضلاع



DEFB تشکیل میشود ولذا $BD = EF$

پس معلوم میشود که $EF = AD$ و چون

$\widehat{FEC} = \alpha$ و $\gamma = DEA$

(متقابله داخل وخارج) نتیجه میشود $\triangle ADE = \triangle EFC$

وبنابراین اولاً $AE = CE$

ثانیاً چون $BE = FC$ متساوی دو مثلث

و $DE = BE$ (دو ضلع مقابل متوازی الاضلاع

پس از جمع $DE = BC$

یا $DE = \frac{BC}{۲}$

۲۱۲ - **فرع** - چون یک ضلع مثلث را بر n جزو متساوی منقسم نموده و از نقاط تقسیم خطوطی بموازات ضلع دیگر رسم کنیم انخطوط ضلع سوم را بر n جزو متساوی تقسیم میکنند

طریقه برهان — چون خطوط فرعیه بر نقاط تقسیم ضلع اول بموازات ضلع سوم مرور دهیم n مثلث متساوی حاصل میشود

۲۱۳ — مسئلهٔ اصلی — میخواهیم خط AB را بر n جزو متساوی منقسم کنیم

حل — چون بر نقطهٔ A خطی اختیاری مرور داده و ابتدا از نقطهٔ A متوالیا n قطعهٔ متساوی بر آن نقل کرده منتها را به نقطهٔ B وصل کنیم و از منتهای هر قطعه خطی بموازات خط واصل رسم نمائیم مسئله حل میشود (فرع فوق)

۲۱۴ — قضیه ۳۶ — خطی که از وسط یک ضلع مثلث بوسط ضلع دیگر وصل شود نصف ضلع سوم و موازی آنست

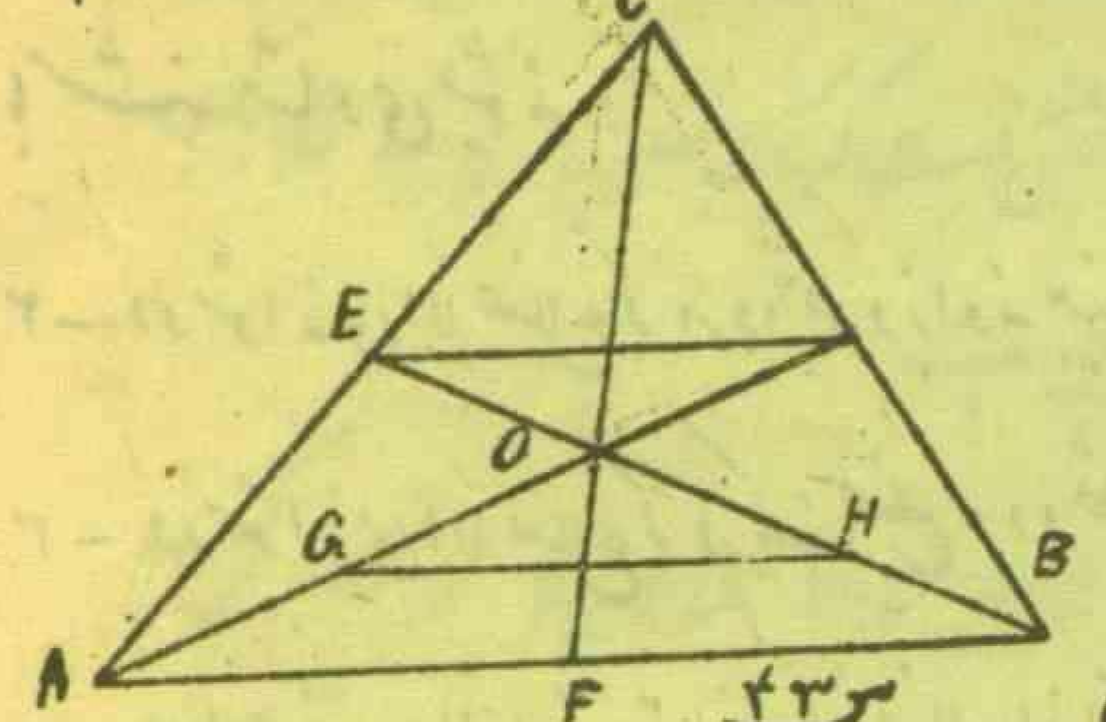
طریقهٔ برهان — قضیهٔ ۳۵ و برهان خلف وسیلهٔ اثبات می شود..

۲۱۵ — تعریف — میانهٔ مثلث خطی است که رأس مثلث را بوسط ضلع مقابل وصل نماید

۲۱۶ — قضیه ۳۷ — سه میانهٔ هر مثلث بر یک نقطه تقاطع میکنند که ابتدا از اضلاع بر ثلث میانه ها واقع است

ب — فرض میکنیم نقطهٔ O س ۴۳ محل تقاطع دو میانهٔ BE و AD باشد

دو قطعه AO و BO را نصف نموده ED و GH را وصل میکنیم



به ق ۲۶ $GH = \frac{AB}{۲}$

و $DE = \frac{AB}{۲}$

پس $GH = DE$

وچون $GH \parallel DE$ (S)

معلوم میشود $\widehat{DHG} = \widehat{OED}$ و $\widehat{OG۲} = \widehat{ODE}$

وبنابراین $\triangle OGH = ODE$ (ز ض ز)

واز اینجا نتیجه میشود $DO = OG = GA = \frac{AD}{۳}$

و $EO = OH = HB = \frac{BE}{۳}$

وبهمین طریق معلوم میشود که میانه CF نیز بر ثلث AD ابتدا از ضلع BC)

یعنی نقطهٔ O مرور میکند

۲۱۷ - تنبیه - در علم جرّ اثقال ثابت میشود که نقطه تقاطع سه میانه مرکز ثقل مثلث است

تمرینات

۱ - مطلوب است براهین احکام ذیل :

۱ـ دو متوازی الاضلاع که در دو ضلع مجاور و فاصله دو ضلع مقابل متساوی باشند متساوی میشوند

۲ـ دو متوازی الاضلاع که در دو قطر و زاویه بینهما متساوی باشند متساویند

۳ـ دو متوازی الاضلاع که در یک ضلع و دو قطر متساوی باشند متساویند

۴ـ چهار منصف الزاویه متوازی الاضلاع از تقاطع با یکدیگر مستطیلی تشکیل میکنند

۵ـ چهار منصف الزاویه هر مستطیل از تقاطع با یکدیگر مربعی میسازند

۶ـ اوساط اضلاع هر چهار ضلعی رئوس یک متوازی الاضلاع میباشند

〃 〃 مستطیل 〃 لوزی 〃 〃

〃 〃 لوزی 〃 مستطیل 〃 〃

〃 〃 مربع 〃 مربع 〃 〃

۷ـ خطوط واصله بین اوساط اضلاع مثلث آن را بچهار مثلث متساوی مجزی میسازند

ب) مطلوب است حل و رسم مسائل ذیل

مسئله ۱ـ مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید

اولاً a و b و h_a ثانیاً a و B و h_a ثالثاً a و

h_a و m_a رابعاً a و m_a و B خامساً B و h_a و h_c

سادسا α و h_c و m_c سابعا α و b و m_c

مسئلهٔ ۲ ــ مثلثی از معلومات $c + b$ و α و h_c رسم کنید

راه حل ــ راس c متعلق بمثلثی است که یک ضلعش $c + b$ و یک ضلعش h_c و یک زاویه‌اش $\frac{\alpha}{2}$ است

مسئلهٔ ۳ ــ مثلثی از معلومات $c + b + a$ و h_a و β رسم کنید

مسئلهٔ ۴ ــ باستعانت لوزی از نقطهٔ مفروضه خطی بموازات خط مفروض فرود بیاورید

مسئلهٔ ۵ ــ مربعی رسم کنید که قطرش معلوم است

مسئلهٔ ۶ ــ از مستطیل یک ضلع و قطرش معلوم است آن را رسم کنید

مسئلهٔ ۷ ــ میخواهیم لوزی رسم کنید که ضلع و یک قطرش معلوم است

مسئلهٔ ۸ ــ مثلثی از a و m_b و m_c رسم کنید

مسئلهٔ ۹ ــ مثلثی از m_a و m_b و m_c رسم کنید

طریقهٔ حل ــ چون یک میانهٔ مثلث را از طرف ضلع باندازهٔ ثلث خود امتداد داده راس مجاور را بمنتهاالیه وصل کنیم مثلثی حاصل میشود که اضلاعش m_a و $\frac{2}{3}$ m_b و $\frac{2}{3}$ m_c میباشد و رسم این مثلث وسیلهٔ رسم مثلث مطلوب میگردد

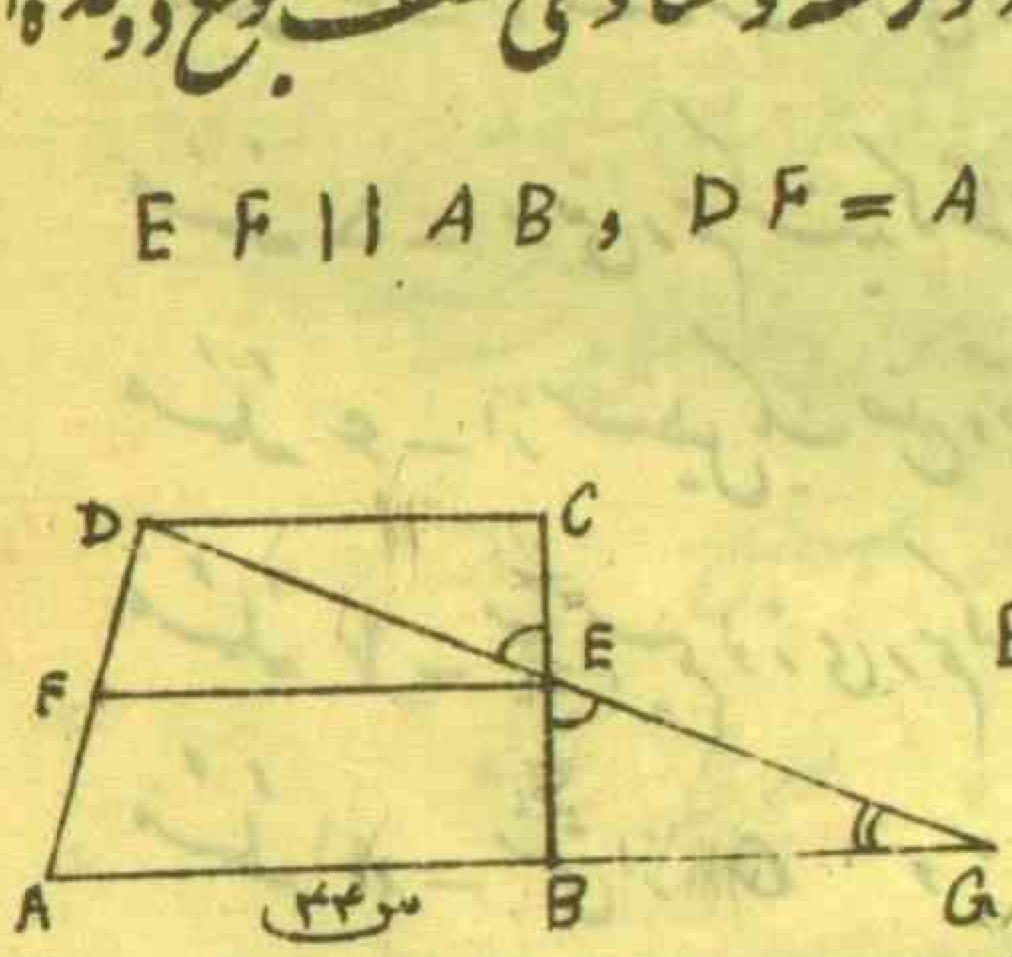
هـ - احکام ذوزنقه

۲۱۸ - **تعریف** - ذواربعة اضلاعی را که فقط دو ضلع متوازی دارد ذوزنقه گویند دو ضلع متوازی را دو قاعده ذوزنقه گویند و دو ضلع غیر متوازی را ساقین و خطیکه وسط دو ساق را وصل میکند میانه ذوزنقه اصطلاح کرده اند

۲۱۹ - **قضیه ۳۸** - خطی که از وسط یک ساق ذوزنقه بموازات دو قاعده رسم شود میانه ذوزنقه و مساوی نصف مجموع دو قاعده است

ف $CD \parallel AB$ س ۴۴ و $DF = AF$ و $EF \parallel AB$

ح ۱- $BE = CE$



۲- $EF = \frac{AB + CD}{2}$

ب - DE را وصل نموده امتداد میدهیم تا امتداد AB را بر G قطع کند آنوقت به ق ۳۵ $DE = GE$ و $EF = \frac{AG}{2}$ اما چون دو مثلث DEC و GEB متساویند (ز ض ز) پس اولا $CE = EB$

و چون $BG = CD$ و بنابراین $AG = AB + CD$ و از طرف دیگر $EF = \frac{AG}{2}$ معلوم میشود که ثانیاً $EF = \frac{AB + CD}{2}$

۲۲۰ - **قضیهٔ ۳۹** - میانهٔ ذوزنقه موازی با دو قاعده و نیمهٔ مجموع آنها است

طریقهٔ برهان - باز چون بر نقطهٔ E خط DG را (شکل سابق) مرور دهیم دو مثلث متساوی حاصل میشود (چون بفرض CE = BE پس DE مساوی EG خواهد بود . . . . .)

۲۲۱ - **فرع** - میانهٔ ذوزنقه هر یک از دو قطر را تنصیف میکند

تمرینات

مطلوب است براهین احکام ذیل

۱ - در ذوزنقهٔ متساوی الساقین دو زاویهٔ مجاوره بهر قاعده متساویند

۲ - هرگاه در ذوزنقه دو زاویهٔ مجاوره بیک قاعده متساوی باشند ذوزنقه متساوی الساقین است

۳ - در ذوزنقهٔ متساوی الساقین دو قطر متساویند

۴ - رئوس ذوزنقهٔ متساوی الساقین بر محیط یک دایره واقعند

۵ - هرگاه رئوس ذوزنقه بر محیط یک دایره باشند ذوزنقه متساوی الساقین است

کتاب دوم ـ احکام دایره

فصل اول

قسمت ـ زوایای مرکزی و محاطی

۱ـ قوس و زوایای مرکزی ـ (با حکام تعاریف از نمره ۴۲ تا ۶۰ رجوع شود)

۲۲۲ ـ تعریف ـ زاویهٔ حادثه مابین دو شعاع واصل بین مرکز و طرفین قوس را زاویهٔ مرکزی گوئیم

۲۲۳ ـ فرع ۱ ـ هر قوس زاویهٔ مرکزی نظیر خود دارد و بالعکس

۲۲۴ ـ فرع ۲ ـ زاویهٔ مرکزی نظیر نیم دایره نیم سطح است

۲۲۵ ـ قضیه ۴۰ ـ هرگاه در یک دایره یا دو دایرهٔ متساویه دو قوس متساوی باشند دو زاویهٔ مرکزی نظیرشان نیز متساویند و بالعکس

چون ملاحظه کنیم که موافق آنچه سابقاً ذکر کرده‌ایم اندازهٔ عددی زاویه همان اندازهٔ قوس نظیر آن است قضیه محقق میشود و بعلاوه ممکن است بوسیله انطباق نیز حکم را ثابت کرد (اثبات با انطباق بر عهدهٔ متعلم است)

۲۲۶ – فرع – در یک دایره یا دو دایرهٔ متساویه زاویهٔ مرکزی نظیر قوس اطول اعظم است وبالعکس

ب – زاویهٔ محاطی و اندازهٔ آن

۲۲۷ – تعریف – قطعهٔ مستقیمی که طرفین قوس را (مابین دو نقطهٔ محیط را) بیکدیگر وصل کند به وتر موسوم است

۲۲۸ – فرع – هر قوس (یا هر زاویهٔ مرکزی) فقط یک وتر نظیر دارد اما هر وتر محیط دایره را بدو قوس که هر دو نظیر آن وترند منقسم میکند لیکن معمولاً وتر را بقوس کوچکتر نسبت میدهند

۲۲۹ – تعریف – زاویهٔ محاطی زاویه ایست که رأسش بر محیط و دو ضلعش دو وتر باشند و قوسی را که مابین دو ضلع و زاویهٔ محاطی محصور است قوس مقابل آن نامند

۲۳۰ – فرع – هر زاویهٔ محاطی فقط یک قوس مقابل دارد و اما هر قوس عدهٔ بیشماری زوایای محاطی نظیر دارد

زوایای محاطی بیشماری را که در قوس مقابل مشترک باشند میتوان به دسته منقسم ساخت :

دسته اول آنکه مرکز بر یک ضلعشان واقع است

" دوم " " مابین دو " "

" سوم " " خارج از دو " "

۲۳۱ - قضیه ۴۱ - هر زاویهٔ محاطی نصف آن زاویهٔ مرکزیست که دارای همان قوس مقابل باشد

برهان - اگر زاویهٔ محاطی از دستهٔ اول باشد س ۴۵ زاویهٔ مرکزی زاویهٔ خارجه از مثلث MPB میشود و به قا۱ نتیجه ۱ $\widehat{APB}=\frac{\widehat{AMB}}{2}$

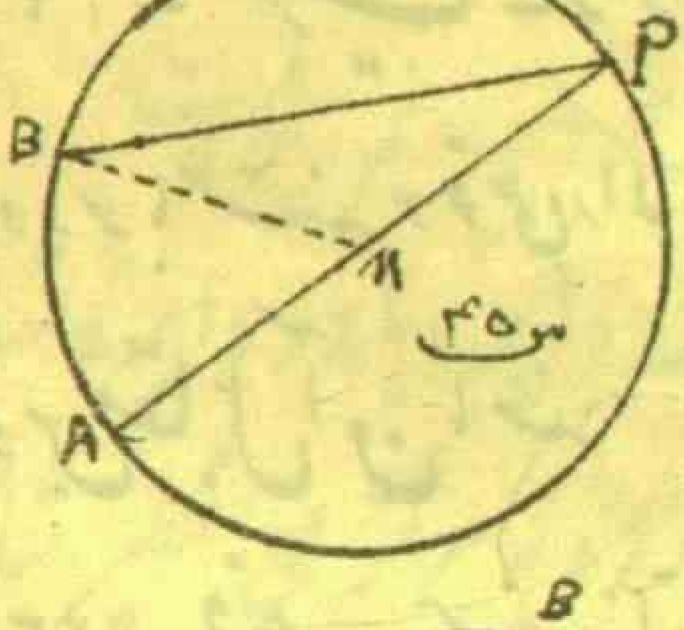
اگر زاویهٔ محاطی از دستهٔ دوم س ۴۶ باشد قطر PD را وصل میکنید

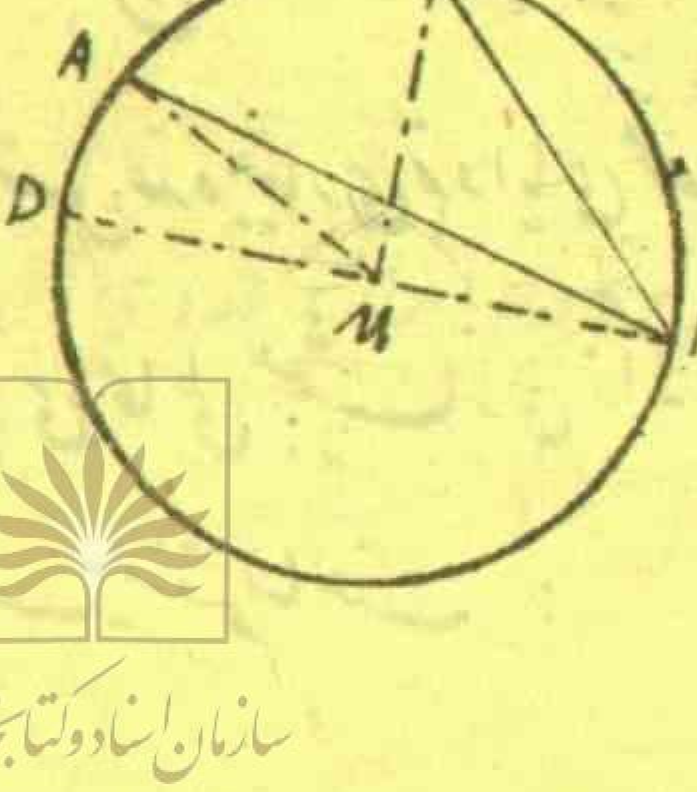
پس $\widehat{APD}=\frac{\widehat{AMD}}{2}$

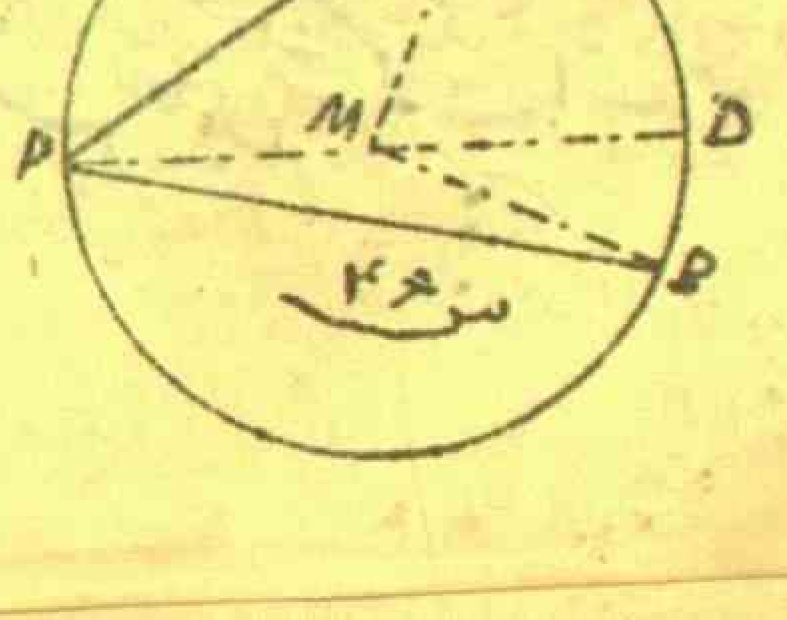
و $\widehat{DPB}=\frac{\widehat{DMB}}{2}$

لذا $\widehat{APD}+\widehat{DPB}=\frac{\widehat{AMD}+\widehat{DMB}}{2}$

$\widehat{APB}=\frac{\widehat{AMB}}{2}$!







درحالت سوم ش ۳۸ استدلال عیناً همین است منتها بعوض جمع دو تساوی آنها را از یکدیگر تفریق میکنیم

۲۳۲ـ نتیجهٔ ۱ـ دو زاویه محاطی که در قوس مقابل مشترک باشند متساویند

۲۳۳ـ نتیجهٔ ۲ـ در یک دایره یا دو دایرهٔ متساویه زوایای محاطیه که قوسهای مقابلشان متساوی باشند متساویند

۲۳۴ـ نتیجهٔ ۳ـ زاویهٔ محاطی در نصف دایرهٔ قائمه است

۲۳۵ـ نتیجهٔ ۴ـ زاویهٔ محاطی منفرجه یا حادّه است موافق آنکه قوس مقابلش بزرگتر یا کوچکتر از نصف دائره باشد

۲۳۶ـ نتیجهٔ ۵ـ اندازهٔ عددی هر زاویهٔ محاطی نصف اندازهٔ قوس مقابل آن است

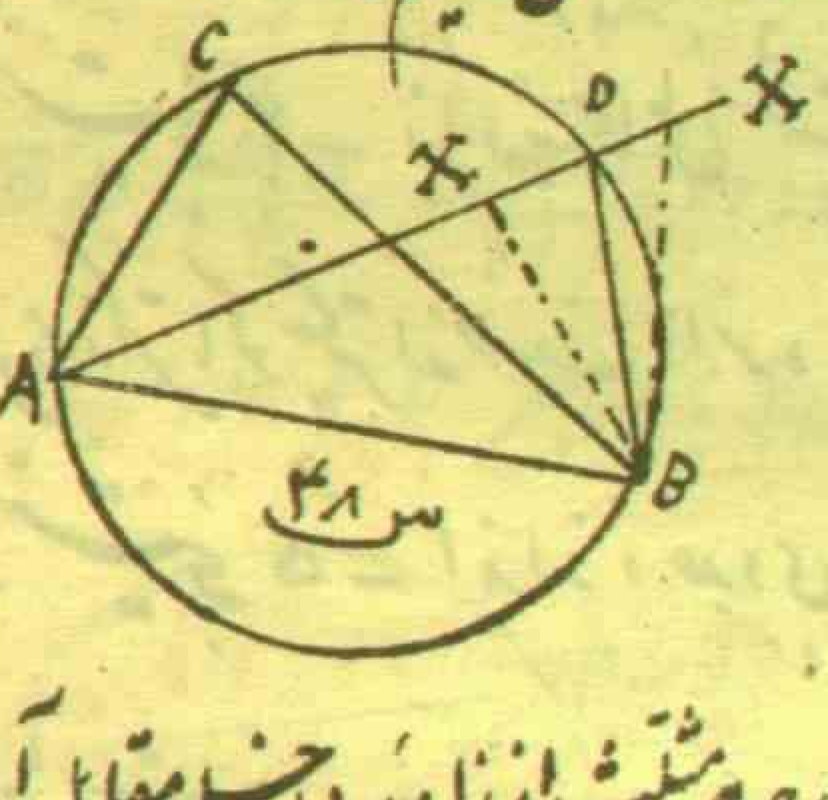
مقیاس زاویه محاطی نصف قوس مقابل آنست

۲۳۷ـ تنبیه ـ برای اثبات تساوی دو زاویه یکمرتبه بوسیله محاطی قرار دادن آنها ثابت کنند که قوس مقابلشان مشترک یا قوس مقابلشان متساویست

۲۳۸ـ هفتنیه ۴۲ـ رئوس جمیع زوایای متساویه که اضلاعشان

بر دو نقطهٔ معین مرور کنند و رئوسشان در یکطرف خط واصل بین این دو نقطه باشد بر محیط یک دایره واقعند

برهان - بر سه نقطه A و B و C س ۴۸ دایرهٔ مرور میدهیم و گوئیم بفرض اینکه $\widehat{ACB}$ و $\widehat{ADB}$ متساوی باشند دایرهٔ مرسومه بر نقطه D نیز مرور میکند والا لازم آید که AD یا امتداد آنرا بر نقطهٔ مانند X قطع کند و این خلاف است زیرا چون X را به B وصل کنیم به ق ۴۱ نتیجه ۱



$\widehat{ACB} = \widehat{AXB}$

و بالفرض $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$

پس نتیجه میشود $\widehat{ADB} = \widehat{AXB}$

و چون از سابق میدانیم که زاویهٔ خارجه هر مثلث از زاویهٔ داخله مقابل آن اعظم است تساوی اخیر تساوی جزء و کل ولذا محال است

۲۳۹ - نتیجه - رئوس زوایای قائمه که دو ضلعشان بر دو نقطهٔ معین مرور کند بر محیط دایره واقع است که قطرش خط واصل بین دو نقطه مفروضه باشد

۲۴۰ - مکان هندسی ۵ - محیط دایرهٔ که بر قطر AB رسم شود مکان هندسی رئوس زوایای قائمه ایست که اضلاعشان بر دو نقطه A و B مرور کنند

۲۴۱ ـ مکان هندسی ۶ ـ قوسی از دایره که AB وتر آن و یک زاویهٔ محاطیش مساوی α باشد مکان هندسی رئوس زوایائیست که همه در یکطرف AB و مساوی α باشند و اضلاعشان بر دو نقطهٔ A و B بگذرند

۲۴۲ ـ **تعریف** ـ قطعهٔ از دایره را که تمام زوایای محاطیهٔ آن مساوی زاویهٔ α باشد حاوی زاویهٔ α گویند

فصل دوم ـ احکام راجعه بخط مستقیم و دایره

۱ ـ اوتار فواصل آنها از مرکز

۲۴۳ ـ **قضیهٔ ۴۳** ـ در یک دایره یا دو دایرهٔ متساویه

اولاً ـ هرگاه دو قوس (یا دو زاویهٔ مرکزی) متساوی باشند دو وتر نظیر آنها متساویند و بالعکس

ثانیاً ـ وتری که قوس موتر آن (یا زاویهٔ مرکزی نظیر آن) اعظم است اطول خواهد بود و بالعکس

طریقه برهان ـ چون مرکز را بطرفین دو وتر وصل نمائیم دو مثلث متساوی الساقین که در ساقین همواره متساویند حاصل میشود و بتساوی دو مثلث یا به ۲۲ یا ۲۳ احکام قضیه محقق میشود.

۲۴۴ - قضیه ۴۴ - اولاً عمودیکه از مرکز دایره بر وتر فرود میآید آن وتر و زاویهٔ مرکزی (یا قوس) نظیر آنرا نصف میکند ثانیاً عمود منصف هر وتر بمرکز دایره میگذرد

طریقهٔ برهان - مرکز را بطرفین وتر وصل میکنیم و احکام قضیه را از احکامیکه در مثلث متساوی الساقین محقق است استنباط مینمائیم

۲۴۵ - مسئله اصلی ۱ - میخواهیم مرکز دایره یا قوس مفروضی را بیابیم

حل - دو وتر غیر متوازی بالاختیار مرور داده و دو عمود منصف آنها را رسم میکنیم بحکم قضیهٔ فوق مرکز همان نقطه تقاطع دو عمود خواهد بود

۲۴۶ - مسئله اصلی ۲ - بر ۳ نقطه غیر واقعه بر یک استقامت دایرهٔ مرور دهید

حل - چون سه نقطه مفروضه را با دو خط بیکدیگر وصل کنیم دو وتر غیر متوازی از دایرهٔ مطلوبه بدست میآید و بنابراین مرکز دایره نقطهٔ تقاطع دو عمود منصف آنهاست

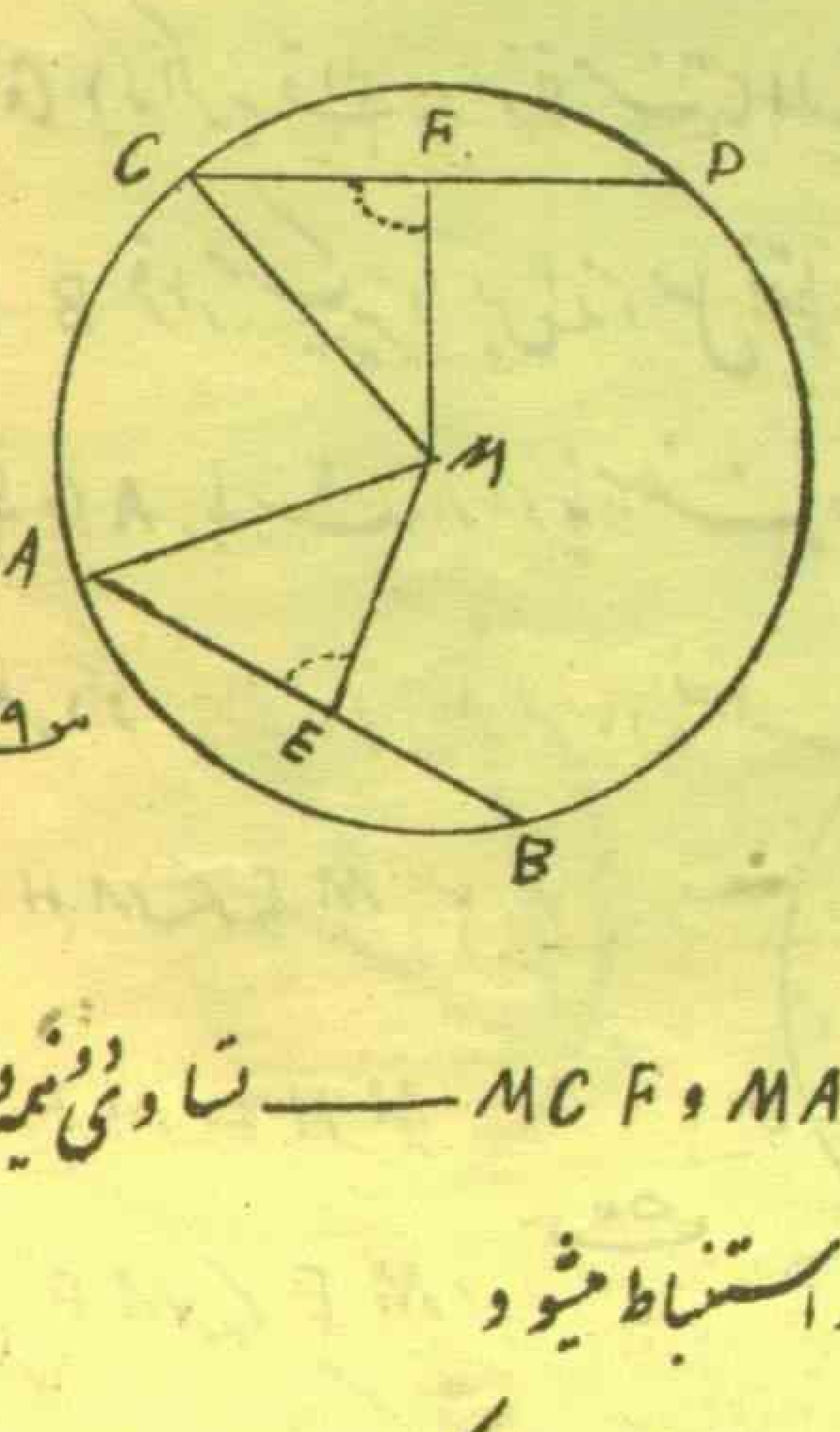
۲۴۷ - تنبیه - چون دو عمود منصف بیش از یک نقطهٔ مشترک ندارند جواب مسئله منحصر بفرد است (به ق ۱۹ رجوع شود)

۲۴۸ـ قضیه ۴۵ ـ در یک دایره یا دو دایرهٔ متساویه

اولاً ـ دو وتر متساوی الطول متساوی البعد ند از مرکز

ثانیاً ـ بالعکس دو وتر متساوی البعد از مرکز متساوی الطول میباشند

برهان ـ اولاً از مرکز بدو نقطه A و C س ۴۹ وصل میکنیم



س ۴۹

به ق ۴۴ $AE = CF$

وبفرض $\hat{E} = \hat{F}$

و $MA = MC$

پس $\triangle MAE = MCF$

وبنابراین $ME = MF$

ثانیاً ـ از تساوی دو مثلث MAE و MCF تساوی دو نیمه وتر AE و CF و از آنجا تساوی دو وتر استنباط میشود

۲۴۹ـ نتیجه ـ اوساط اوتار متساویه در یک دایره بر محیط دایرهٔ دیگر که با اولی متحد المرکز است واقع میشوند

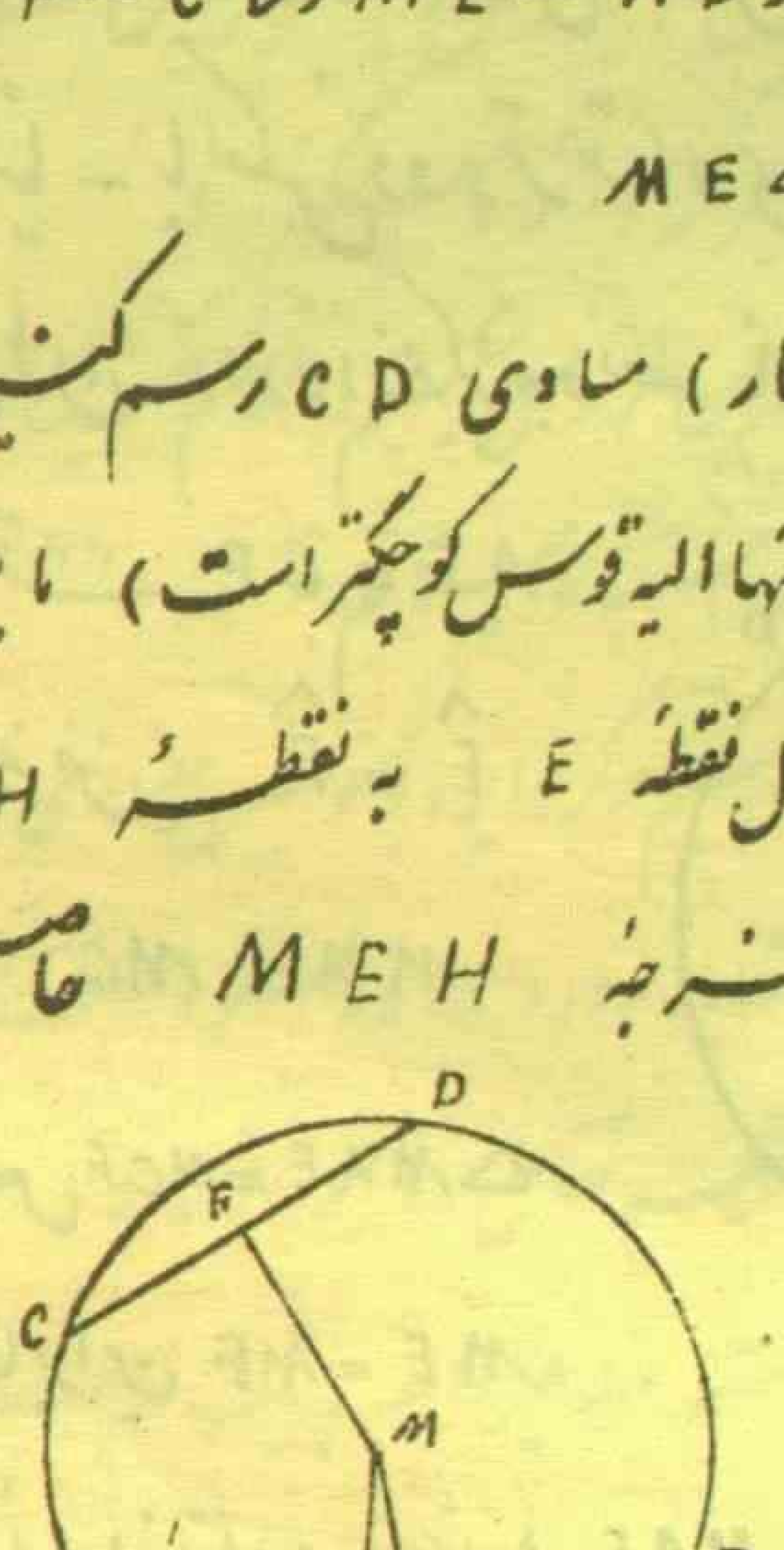
۲۵۰ـ قضیه ۴۶ ـ در یک دایره یا دو دایرهٔ متساویه اولاً ـ از دو وتر غیر متساوی آن وتری

اطول بمرکز اقرب است

ف - سند $AB > CD$ و $ME \perp AB$ و $MF \perp CD$

ح - $ME < MF$

ب - چون وتر AG را (بدو پرگار) مساوی CD رسم کنیم نقطهٔ G (که اگر به ق ۴۱ و اولاً منتهاالیه قوس کوچکتر است) مابین A و B قرار میگیرد پس از وصل نقطهٔ E به نقطهٔ H که وسط AG باشد زاویهٔ منفرجهٔ MEH حاصل میگردد



ولذا $ME < MH$

لیکن $MH = MF$

سند

پس $ME < MF$

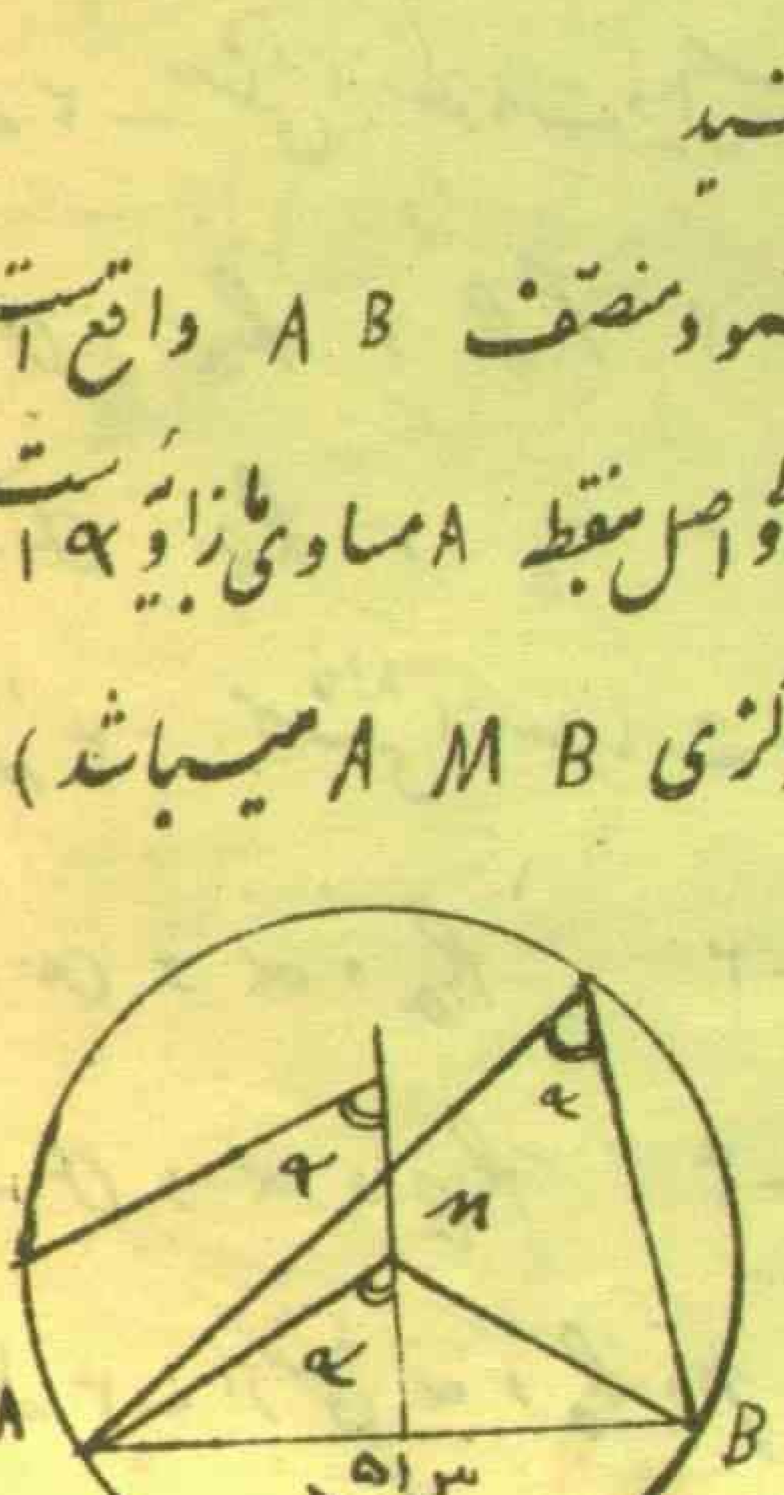
ثانیاً - بالعکس از دو وتر اطول آن است که بمرکز اقرب باشد

طریقهٔ برهان - عدم تساوی دو نیمه وتر بدلیل خلف و شعاعات ق ۴۳ و اولاً و ق ۴۵ و اولاً ثابت میکنیم

۲۵۱ - نتیجه - در هر دایره قطر از تمام اوتار اطول است

۲۵۲ - مسئله اصلی - بر خط AB سا۵ قطعه دایره حاوی زاویهٔ مفروضه ۹ رسم کنید

حل - از طرفی مرکز دایره بر عمود منصف AB واقع است و از طرف دیگر زاویه بین عمود منصف و خط واصل بنقطه A مساوی با زاویهٔ ۹ است (زیرا زاویهٔ محاطی ۹ نصف زاویهٔ مرکزی AMB میباشد) و از اینجا طریقهٔ رسم ذیل استنباط میشود



رسم - عمود منصف AB را رسم نموده بر یکی از نقاط آن زاویهٔ مساوی ۹ بسازیم و بر نقطه A خطی بموازات ضلع ثانی این زاویه مرور دهیم تا عمود منصف را بر نقطه M که مرکز دایرهٔ مطلوبه است قطع کند

۲۵۳ - ملاحظه - اگر زاویهٔ ۹ حاده باشد قطعه حاوی بزرگتر از نیم دایره است و اگر منفرجه باشد کوچکتر از نیم دایره

تمرینات

مسئلهٔ ۱ - از مثلثی قائم الزاویه وتر و ارتفاع وارد بر آن معلوم است
مطلوب است رسم این مثلث

مسئلهٔ ۲ - مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید

۱- a و h_a و h_b ۲- a و h_b و h_c

۳- a و h_b و m_a ۴- a و h_b و m_b

مسئلهٔ ۳ - مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید

۱- a و α و h_a ۲- a و α و m_a

۳- a و α و h_b ۴- a و α و $b \pm c$

مسئلهٔ ۴ - از مثلثی α و h_a و $2p = a + b + c$ معلوم است
میخواهیم مثلث را رسم کنیم (زاویهٔ مقابل بضلع $a + b + 2K$
معادل $\frac{\alpha}{2} + 1^{ق}$ خواهد بود)

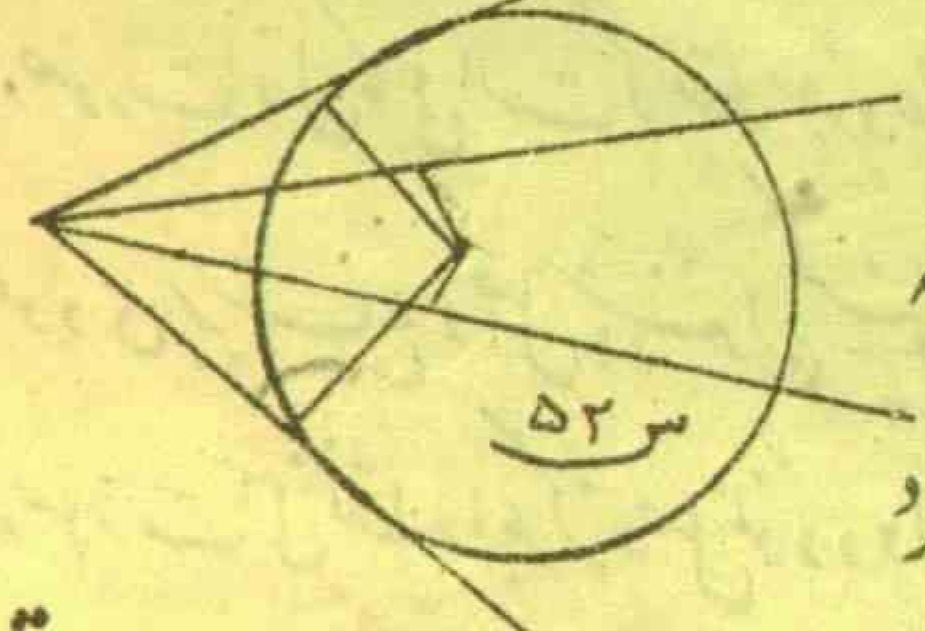
ب - قاطع و مماس

۲۵۴ - **تعریف** - چون وتری در خارج دایره امتداد داشته باشد آنرا قاطع نامند

۲۵۵ - **فرع** - هر قاطع دایره را بدو نقطه قطع میکند نقطهٔ دخول و نقطهٔ خروج

۲۵۶ - **تعریف** - چون قاطعی را حول یکی از نقاط آن که خارج دایره باشد (مبدأ قاطع) دوران دهیم دو نقطه خروج و دخول آن بر محیط دایره تغییر محل میدهند و فاصله وتر بین این دو نقطه از مرکز دایره تغییر میکند حال اگر قاطع آنقدر دوران کند که نقطه دخول و خروج بر یکدیگر منطبق شوند فاصله آن از مرکز دایره مساوی شعاع میگردد و در این وضع خط (قاطع) را نسبت بدایره **مماس** گویند و نقطه مشترک بین دایره و مماس را نقطه **تماس** خوانند س ۵۲

۲۵۷ - **فرع** - چون در ضمن دوران وضع مزبور دو مرتبه برای قاطع حاصل میشود میتوان فهمید که:



از نقطه مفروضه در خارج دایره همیشه ممکن است دو مماس بر آن رسم کرد

۲۵۸ - **قضیه ۴۸** - **خط مماس بر شعاع نقطه تماس عمود است**

برای اثبات این قضیه چنانکه از تعریف مماس استنباط میشود کافی است ملاحظه کنیم همواره عمودیکه از مرکز بر وتر فرود میآید منصف آن است اما وتری که از مماس در دایره واقع است یک نقطه بیش نیست و وسط آن

نقطهٔ دخول و خروج مشتبه است

۲۵۹ - **نتیجه ۱** - از نقطهٔ مفروضه بر محیط دائره فقط یک مماس میتوان بر آن رسم کرد

۲۶۰ - **نتیجه ۲** - دو مماسی که از نقطه خارجی بر دایره رسم میشود متساویند (چون نقطهٔ خارجی را بمرکز و مرکز را بدو نقطهٔ مماس وصل کنیم دو مثلث متساوی بحالت ض ض ز تولید میشود

۲۶۱ - **مسئله اصلی** - میخواهیم از نقطه مفروضه مماسی بر دائره مفروضه رسم کنیم

حل - این مسئله دو حالت دارد یا نقطه مفروضه بر محیط است یا در خارج دائره

درصورت اول کافی است که نقطه مفروضه را بمرکز وصل نموده و از همان نقطه عمودی بر شعاع واصل اخراج کنیم

درصورت ثانی نقطه را بمرکز وصل نموده دائره بقطر خط واصل مرور میدهیم تا دائره مفروضه را بر دو نقطه تقاطع کند چون این دو نقطه را بنقطهٔ مفروضه وصل کنیم دو جواب مسئله بدست میآید (زیرا زاویهٔ محاط درنیم دائره قائمه است)

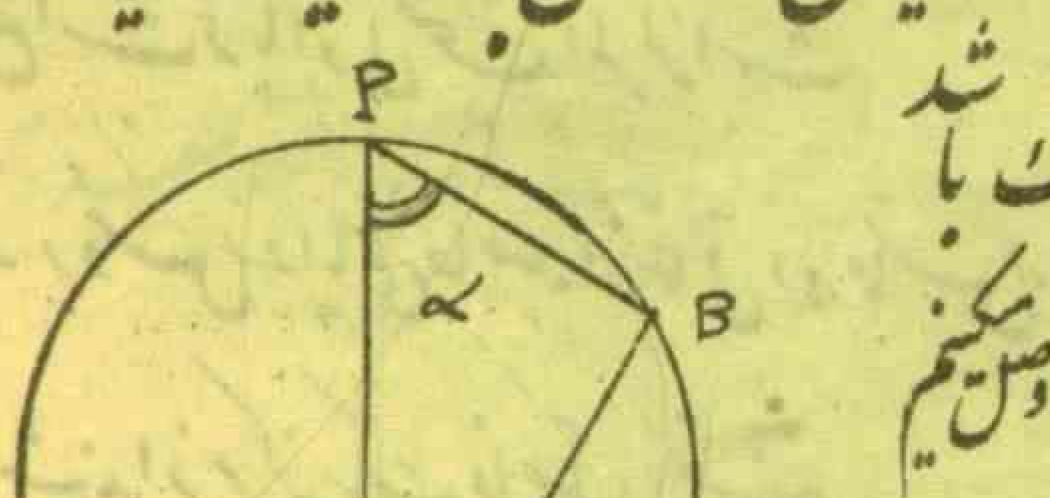
۲۶۲ - **مکان هندسی ۷** - مکان هندسی مراکز دوایریکه در نقطهٔ معین از خط مفروض مماس شوند عمودیست که از این نقطه برخط مفروض اخراج شود

۲۶۳ - **فرع** - مراکز جمیع دوایریکه بشعاع معین r باشند و با خط مفروض مماس شوند بر دو خط واقع میشود که از طرفین خط اول و بفاصله r بموازات آن مرور کند

۲۶۴ - **فرع** - مکان هندسی نمره ۱۴۶ را بطریق ذیل نیز میتوان بیان کرد
خط منصف الزاویه مکان هندسی مراکز دوایریست که با دو ضلع زاویه مماس باشند

۲۶۵ - **تعریف** - زاویه را که مابین مماس و وتر مار بر نقطهٔ مماس حادث میشود زاویه ظلی گوئیم (مماس ازظل نیز نامند) و قوسیکه مابین دو ضلعش واقع است قوس مقابل آن نامند

۲۶۶ - **قضیه ۴۸** - زاویهٔ ظلی مساوی با زاویهٔ محاطیه ایست که در قوس مقابل با آن مشترک باشد



س ۵۳

برهان - قطر AP (س ۵۳) را وصل میکنیم
دو زاویه TAB و APB متساویند
زیرا هر یک متمم زاویه BAP میباشند
(چونکه $\widehat{ABP}$ و PAT قائمه اند)

۲۶۷ - **تنبیه** - بوسیلهٔ ق ۴۸ مکان هندسی نمره ۲۲۱ را بطریقی سهلتر از آنچه در نمره ۲۵۲ ذکر کردیم میتوان رسم نمود بدینطریق که بر نقطهٔ A (س ۵۱) زاویه مساوی α ساخته و عمودی بر ضلع دوم آن از نقطهٔ A اخراج میکنیم تا عمود منصف را بر نقطه

M تقاطع نموده مرکز را معین کنند

۲۶۸ - فرع - عکس قضیهٔ ۴۸ صحیح است (اثبات بر متعلم است)

تمرینات

مطلوب است براهین احکام ذیل

۱ - مماسهائیکه مبدء اشان از مرکز دایره بیک فاصله است متساویند

۲ - مبدأهای جمیع مماسهای متساویه که بر دایرهٔ مفروضه رسم میشود بر محیط دایره واقع است که با اولی متحد المرکز است

۳ - رؤس زوایای حاصله از تلاقی دو مماس درصورتیکه زوایای مزبور متساوی باشند از مرکز بیک فاصله واقعند

مسئله ۱ - بر دایرهٔ مفروض مماسی بموازات خطی مفروض (یعنی با ابتدا معینی) رسم کنید

مسئله ۲ - دایرهٔ رسم کنید که بر نقطهٔ مفروض A مرور کند و بر نقطهٔ معین از BC با این خط مماس شود

مسئله ۳ - با شعاع معین r دایرهٔ رسم کنید که بر نقطهٔ مفروضه و خط BC مماس شود (دو جواب)

مسئلهٔ ۴ - دایره رسم کنید که با دو خط متقاطع مماس باشد بنابر آنکه نقطهٔ تماس بر یکی از دو خط معلوم باشد

مسئلهٔ ۵ - بر نقطهٔ مفروضه A در خارج دایرهٔ مفروضه قاطعی چنان مرور دهید که در دایره وتری بطول معین احداث کند شرط امکان مسئله باید ۲ > ل)

طریقهٔ حل - موافق نتیجه ق ۴۲ د اولاً قاطع مطلوب بر دایره که با دایرهٔ اول متحد المرکز است مماس خواهد بود پس باید این دایره را رسم نمود (دو جواب)

مسئلهٔ ۶ - میخواهیم قاطعی رسم کنیم که در دایرهٔ مفروضه وتری بطول ل احداث نموده اولاً بر خط مفروض عمود باشد یا ثانیاً با خط مفروض زاویهٔ مساوی α تشکیل دهد

مسئلهٔ ۷ - تعیین نقطه مطلوب است که مماس وارد از آن نقطه بر دایرهٔ مفروضه بطول معین ل باشد

مسئلهٔ ۸ - نقطهٔ مطلوب است که از آن نقطه دایرهٔ مفروضه بزاویهٔ معین α رؤیت شود (زاویهٔ بین دو مماس α باشد)

مسئلهٔ ۹ - نقطهٔ تعیین کنید که چون از آن نقطه دو مماس بر دو دایرهٔ مفروضه رسم کنیم هر دو مماس بطول معین ل باشد

مسئله ۱۰ - مطلوب است یافتن نقطه که از آن نقطه دو دایره معفروضه را بزاویه معین ۷ رؤیت کنیم

ج - مثلث و ذواربعه اضلاعی محیطی و محاطی

۲۶۹ - **تعریف** - هرگاه جمیع رؤس کثیرالاضلاعی بر محیط دایره واقع باشد دایره را محیط بر آن و کثیرالاضلاع را محاط در دایره گویند و هرگاه اضلاع کثیرالاضلاع همه با دایره مماس باشند دایره محاط و کثیرالاضلاع بر آن محیط است

۲۷۰ - **قضیه ۴۹ - بر هر مثلث میتوان یک دایره محیط نمود وبعبارة اخری مثلث شکلیست قابل محاط شدن در دایره**

زیرا همواره بواسطه سه رأس مثلث دایره مشخص میگردد که مرکزش نقطه تلاقی عمودهای منصف اضلاع آن مثلث است (نتیجه ق ۱۹)

۲۷۱ - **قضیه ۵۰ - مثلث شکلیست قابل محیط شدن بر دایره وبعبارة اخری هر مثلث را دایره ایست محاطی منحصر بفرد**

زیرا چنانکه میدانیم (ق ۲۲) سه منصف الزاویه هر مثلث بر یک نقطه تقاطع میکنند که از سه ضلع یک فاصله است پس چون این نقطه را مرکز نموده بشعاع

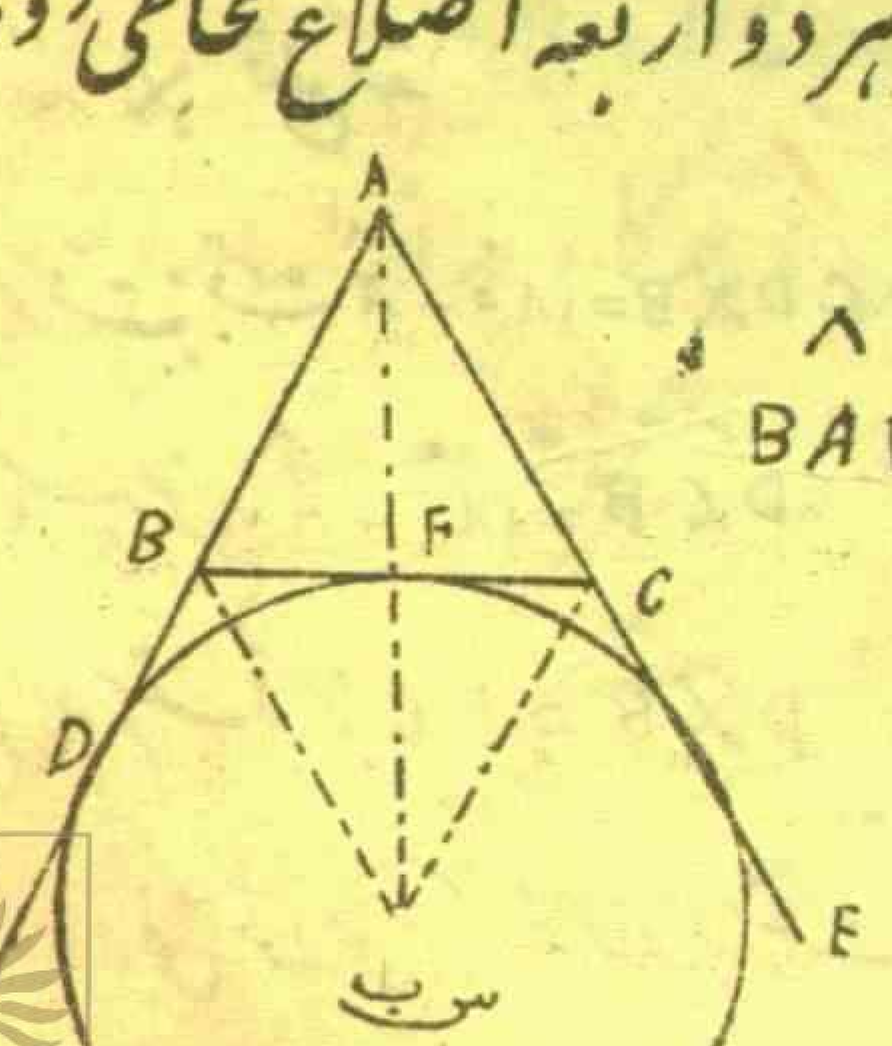
یکی از سه فاصله دایرهٔ رسم کنیم بر سه ضلع مماس و در مثلث محاط میشود

۲۷۲ - **تعریف** - دایرهٔ را که با یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس باشد اصطلاحاً محاطیهٔ خارج گویند س ب

۲۷۳ - چنانکه سابق گفته ایم منصف زوایای خارجهٔ مثلث با هر منصف الزاویهٔ داخله بریک نقطه تقاطع میکنند که نیز از سه ضلع مثلث متساوی البعد و بنابراین مرکز یک دایرهٔ محاطیهٔ خارج است بروجهی که هر مثلث یک دایرهٔ محاطیه و سه دایرهٔ محاطیهٔ خارج دارد پس قضیهٔ ذیل محقق است

قضیهٔ ۵۱ - بر سه خط که دو بدو متقاطع باشند (مثلث) همواره میتوان چهار دایرهٔ مماس نمود

۲۷۴ - **قضیهٔ ۵۲** - در هر ذوار بعهٔ اضلاع محاطی دو زاویه متقابل مکمل یکدیگرند

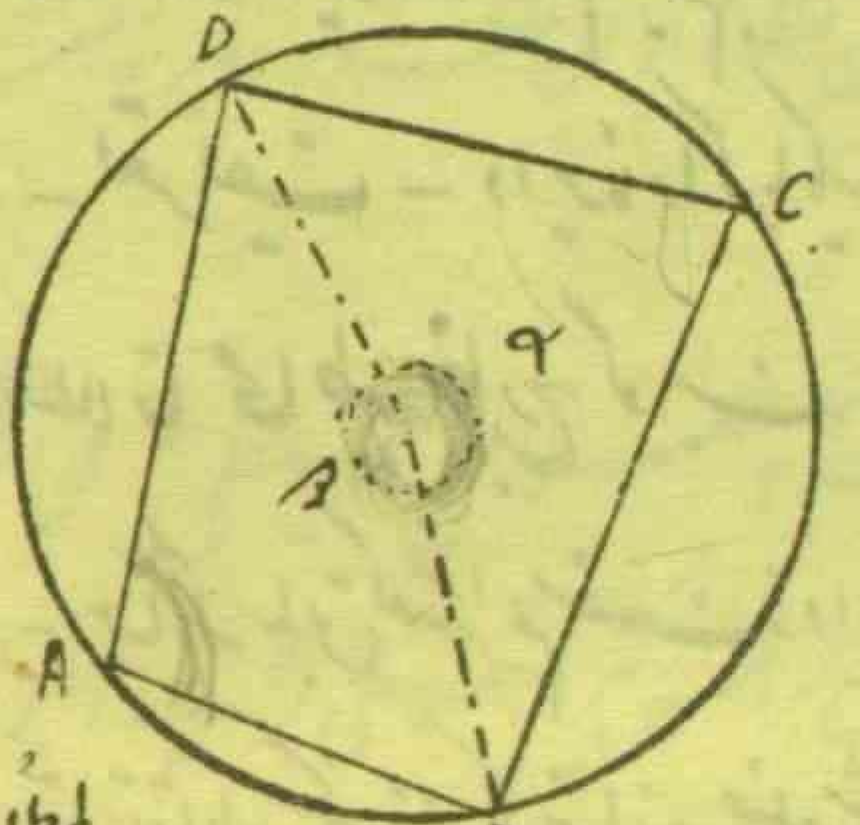


مثلاً در س ۵۴ $\hat{BAD} + \hat{BCD} = 180°$

برهان - زاویهٔ محاطی

$\hat{BAD}$ وزاویهٔ مرکزی ه

در قوس مقابل BCD شتر کند



ولذا $B\hat{A}D = \frac{\alpha}{2}$

بهمین دلیل $B\hat{C}D = \frac{\beta}{2}$

پس $B\hat{A}D + B\hat{C}D = \frac{\alpha+\beta}{2}$

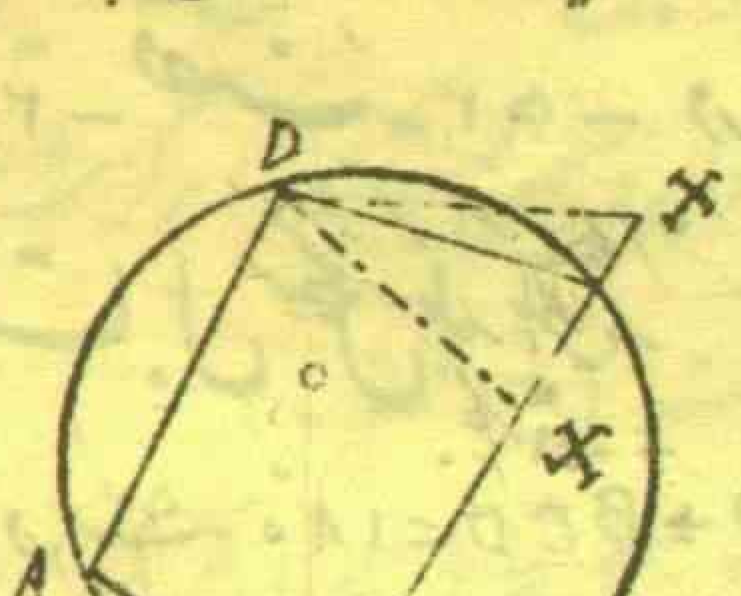
وچون $\alpha + \beta = 360^\circ$

ش ۵۴ وهوالمطلوب

$BAD + BCD = 180^\circ$

۱۷۵ـ **قضیهٔ ۵۳** ـ (عکس) هرگاه در ذو اربعة اضلاعی دو زاویهٔ متقابل مکمل باشند شکل قابل محاط شدن در دایره است

برهان ـ زیرا چون بر سه نقطه A و B و D ش ۵۵ دایره مرور دهیم البته بر نقطه C نیز مرور میکند والا لازم آید که BC یا استداد آن را بر نقطهٔ دیگر مانند X قطع کند



ش ۵۵

آنوقت به ق ۵۲ $CDXB = 180^\circ - \hat{A}$

وبالفرض $D\hat{C}B = 180^\circ - \hat{A}$

پس بعلوم متعارفه $DXB = DCB$

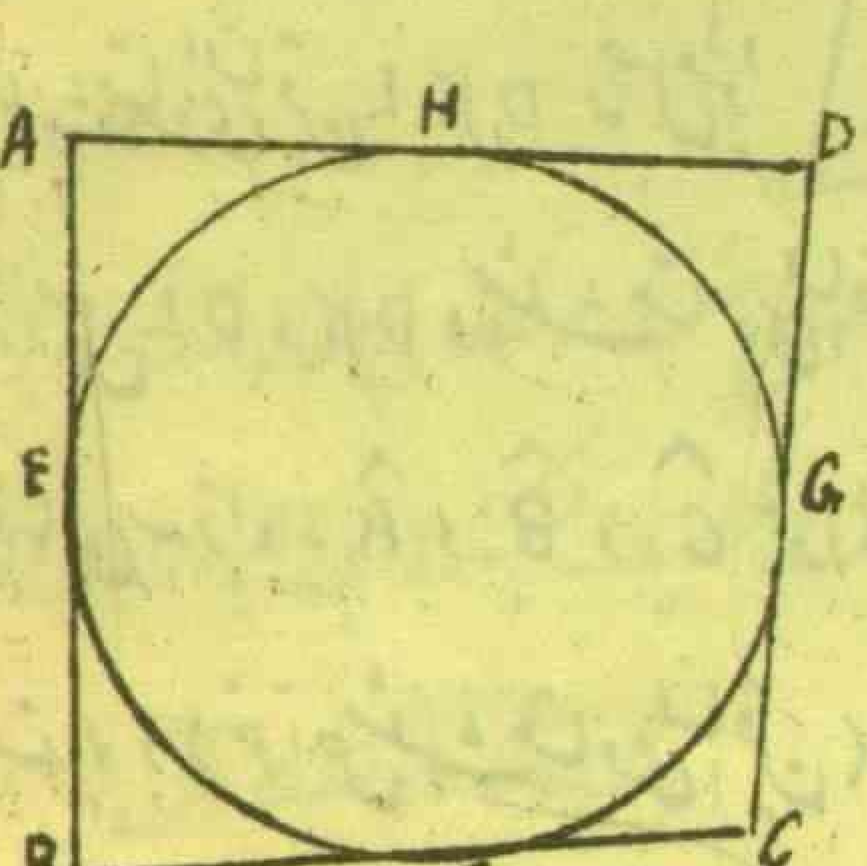
و موافق خواص زاویهٔ خارجه مثلث تساوی اخیر تساوی جزو وکل ولذا محال است

۲۷۶ - قضیهٔ ۵۴ - در هر ذوار بعهٔ اضلاع محیطی مجموع دو ضلع مقابل مساوی است با مجموع دو ضلع دیگر

مثلاً ش ۵۶

$$AB + DC = AD + BC$$

برهان - اگر E و F و G و H چهار نقطهٔ تماس باشند تساویهای ذیل حاصل است



ش ۵۶

$$AE = AH$$

و $BE = BF$

و $CG = CF$

و $GD = DH$

که از جمع آنها بعد از اختصار نتیجه میشود

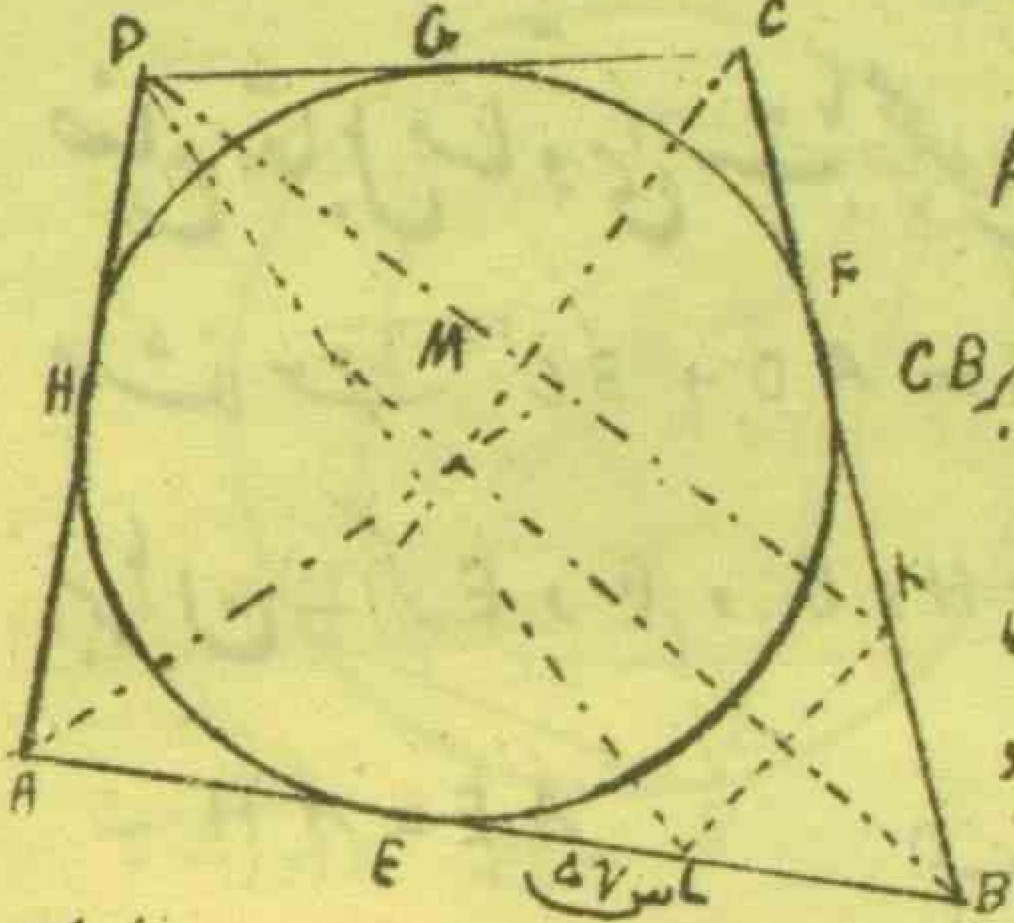
$$AB + DC = AD + BC$$

۲۷۷ - قضیه ۲۵ - (عکس) هرگاه در ذوار بعهٔ اضلاعی مجموع دو ضلع متقابل مساوی با مجموع دو ضلع دیگر باشد شکل قابل محیط شدن بر دایره است

ف - ش ۵۷ $AB + CD = AD + BC$

ج - $ABCD$ ذوار بعهٔ اضلاعی محیطی است

ب - از تساوی فرض این تساوی نتیجه میشود



$$AB - AD = BC - CD$$

پس چون AD را بر AB و CD را بر CB نقل نمود دو منتهاالیه L و K را وصل نمائیم مثلث متساوی الساقین DKL حاصل میشود

ونیز از وصل DL و DK دو مثلث متساوی الساقین DAL و DCK بدست میآید و بنا بر این منصفهای سه زاویه $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ عمودهای منصف اضلاع مثلث DKL خواهند بود (خواص مثلث متساوی الساقین) ولذا هر سه بر نقطهٔ مانند M تقاطع میکنند که چون متعلق بمنصف الزاویه است از چهار ضلع متساوی البعد و لهذا مرکز دایرهٔ است که با اضلاع ذوار بعة اضلاع مماس شود

تمرینات

۱ - براهین احکام ذیل چیست

۱ - مستطیل ذوار بعة اضلاعی است محاطی

۲ - لوزی قابل محیط شدن بر دایره است

۳ - خطی که موقع دوار تقاطع مثلث را وصل میکند از مثلث ذوار بعة اضلاعی

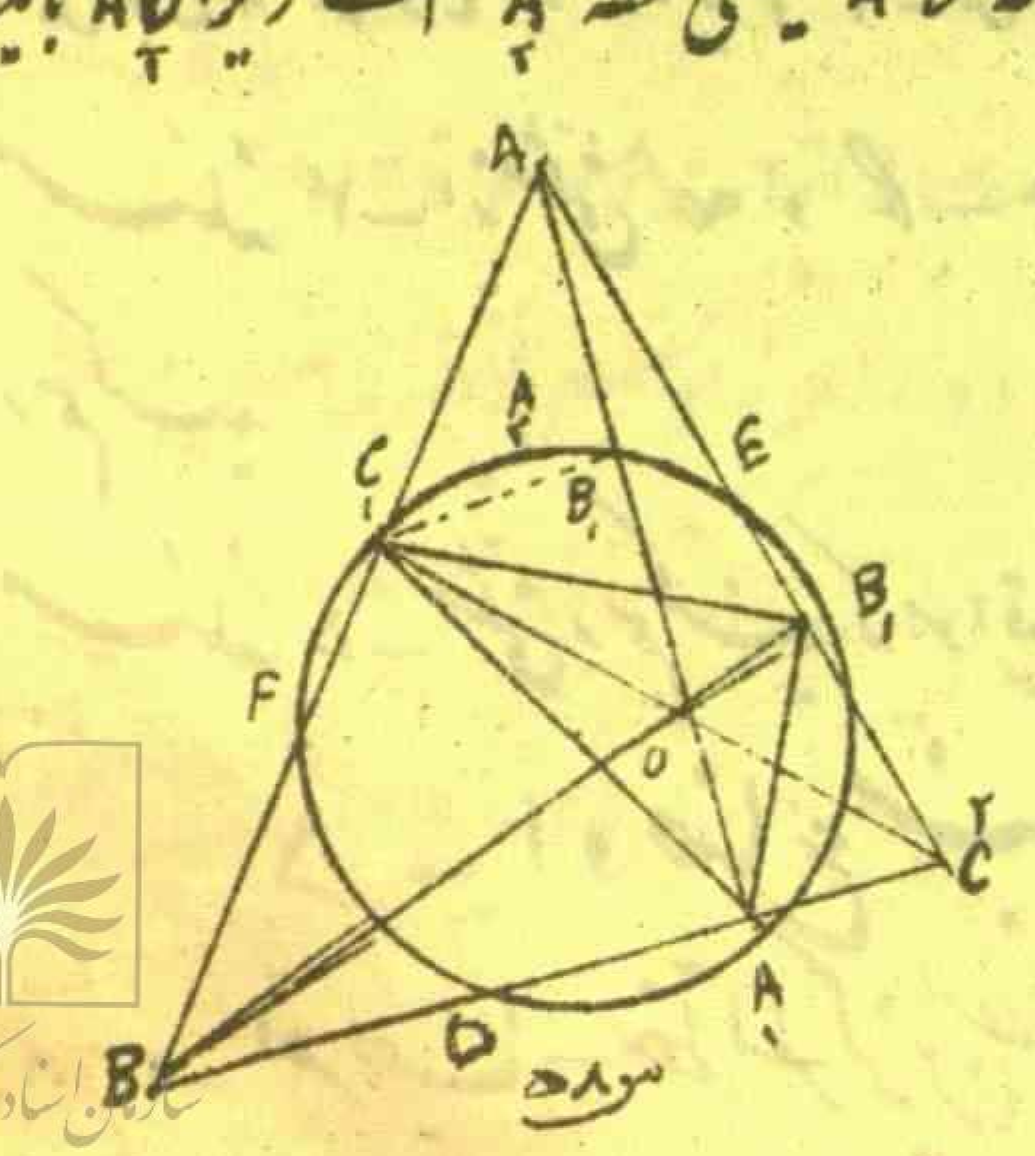
محاطی جدا میسازد (ق ۴۰)

۴ - سه ارتفاع مثلث آزاد بر سه ذوار بعه اضلاع محاطی مجزی میکنند

۵ - سه ارتفاع هر مثلث منصف الزاویه های مثلث دیگری هستند که رئوس مواقع ارتفاع مثلث اول است (این مثلث را مثلث ارتفاعیه مثلث اول اصطلاح میکنیم)

۶ - دایرهٔ محیط مثلث ارتفاعیه اضلاع مثلث و قطعاتی از ارتفاعات را که ما بین رأس و نقطه تلاقی سه ارتفاع است تنصیف میکند (این دایره را دایره نه نقطه یا دایرهٔ فویرباخ نامند Feuerbach

طریقه برهان - ذوار بعة اضلاع AC_1DB_1 ص ۵۸ محاطی است (حکم ۴) و مرکز دایرهٔ محیطیه اش وسط قطعهٔ AD یعنی نقطه A_2 است زیرا AD باید قطر دایره باشد



صوره ۵۸

پس $\widehat{C_1A_2A_1} = ۲\,\widehat{C_1AD}$

ولی $\widehat{C_1AD} = \widehat{C_1B_1D}$

وبحکم $\widehat{C_1B_1D} = \widehat{OB_1A_1}$

ولهذا $\widehat{C_1A_2A_1} = \widehat{C_1B_1A_1}$

یعنی نقاط A_2 و A_1 و B_1 و C_1 بر محیط یک دایره واقعند (ق ۴۲)
سایر اجزاء حکم نیز عیناً بهمین طریقه محقق میشود

ب) مسائل (شعاع دایرهٔ محیطیه مثلث را R و اشعهٔ دوایر محاطیه را r و r_a و r_b و r_c علامت قرار دهیم)

مسئلهٔ ۱ - مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید

۱- α و h_a و r ۲- α و h_a و r_a

۳- α و h_b و r ۴- α و h_b و r_a

مسئلهٔ ۲ - مثلثی از α و h_a و r_b رسم کنید

مسئلهٔ ۳ - مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید

۱- a و $c+b$ و r و β یا γ ۲- a و $c+b$ و r یا r_a

مسئلهٔ ۴ - از مثلثی α و $a+c-b$ و r_a معلوم است آنرا رسم کنید

مسئلهٔ ۵ - مثلثی رسم کنید که مواقع سه ارتفاعش معلوم است

د - اوضاع نسبی دو دایره

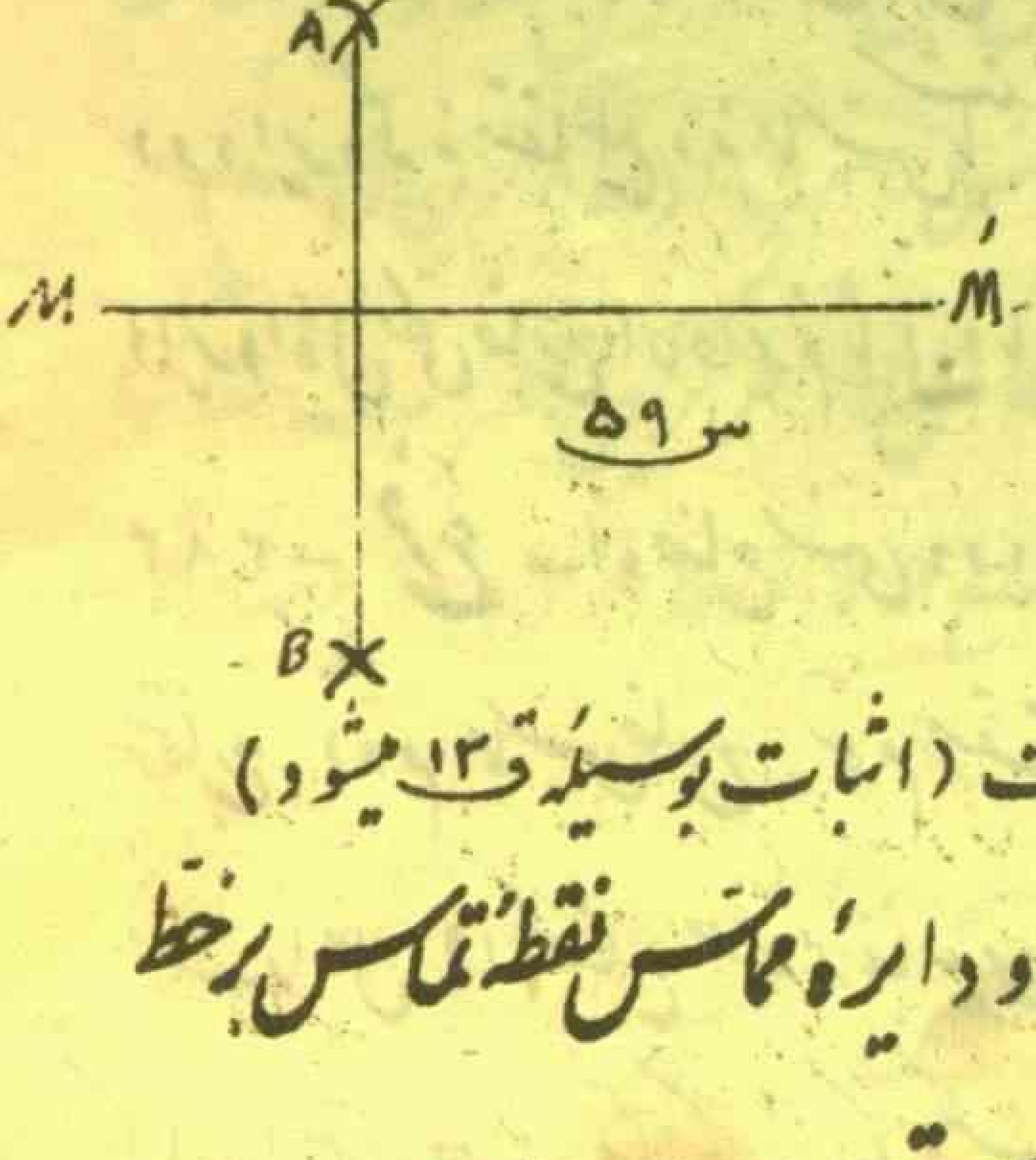
۲۷۸ - تعریف ۱ - خط المرکزین مستقیمی است که بین مرکز دو دایره را وصل کند

تعریف ۲ - دو دایره را مماس گوئیم هرگاه بیش از یک نقطهٔ مشترک نداشته باشند

تعریف ۳ - طرفین هر قطعه خط را نسبت بعمود منصف آن قرینهٔ یکدیگر گویند

۲۷۹ - قضیهٔ ۵۶ - هرگاه دو دایره در یک نقطهٔ خارج خط المرکزین مشترک باشند در نقطهٔ دیگر که قرینهٔ نقطهٔ اول نسبت بخط المرکزین است نیز مشترک و لذا متقاطع میشوند

برهان - چون نقطه B س ۵۹ قرینهٔ نقطه A فرض شده خط المرکزین عمود منصف AB خواهد بود و لذا $MA = MB$ $M'A = M'B$



و بنابراین هر دو دایره بنقطهٔ B میگذرند و متقاطع میشوند

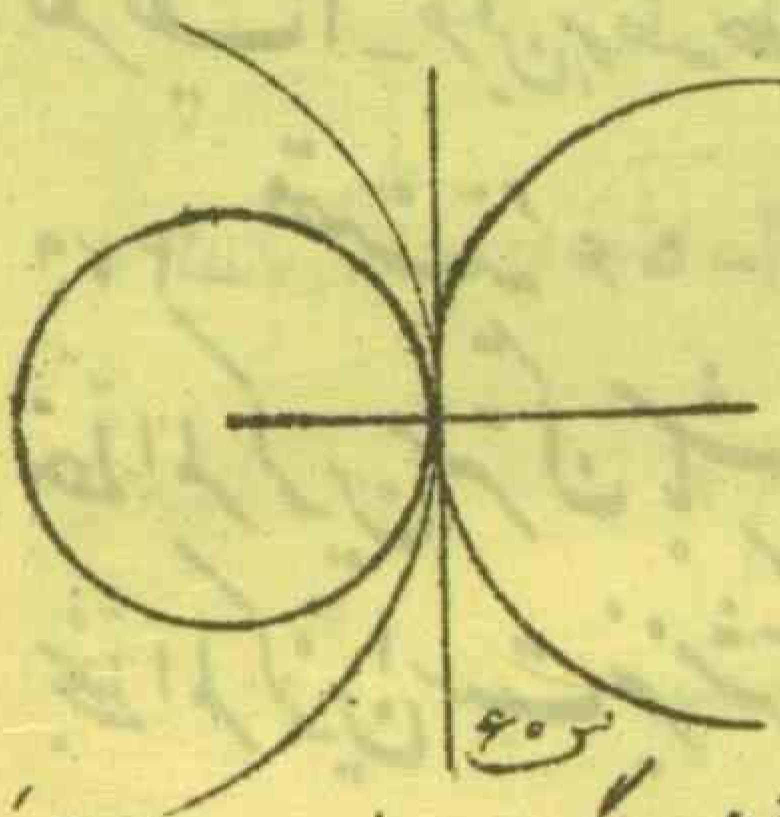
فرع - خط المرکزین در دو دایره متقاطع بر وتر مشترک عمود است (اثبات بوسیلهٔ ق ۱۳ میشود)

۲۸۰ - قضیهٔ ۵۷ - در دو دایرهٔ مماس نقطهٔ تماس بر خط المرکزین یا امتداد آن است

ب - (خلف) اگر نقطه تماس خارج از خط المرکزین باشد بقضیهٔ فوق دو دایره متقاطع میشوند و این خلاف فرض است

۲۸۱ - **نتیجه** - دو دایرهٔ مماس ش۶ - مماس مشترکی بر نقطهٔ تماس قبول میکنند

۲۸۲ - **فرع** - مکان هندسی مراکز دوایریکه بر نقطهٔ معینی از دایرهٔ مفروضه مماس باشند خطی است که بر مرکز دایره و نقطهٔ مفروضه میگذرد



۲۸۳ - **تعریف** - تماس دو دایره بدو شکل ممکنست اگر دایرهٔ ثانی در خارج دایرهٔ اول باشد دو دایره را مماس خارج و الّا مماس داخل گویند

دو دایره که نه متقاطع و نه مماس باشند یا متخارج و یا متداخل اند یعنی یا دایرهٔ اول بکلّی خارج از دایرهٔ ثانی و یا بکلّی داخل در آن است

۲۸۴ - **فرع** - اوضاع نسبی دو دایره منحصر در پنج وضع است اول متخارج دوم مماس خارج سوم متقاطع چهارم مماس داخل پنجم متداخل (اوضاع خمسه مرتباً بدین طریق استفاده میشود که دو دایره را که ابتدا متخارج هستند بیکدیگر نزدیک کنیم)

۲۸۵ - **قضیهٔ ۵۸** - اولاً در دو دایرهٔ متخارج خط المرکزین اطول است از مجموع دو شعاع (زیرا خط المرکزین علاوه بر مجموع دو شعاع

شامل قطعه ایست که بین دو دایره واقع شده)

ثانیاً - در دو دایرهٔ مماس خارج خط المرکزین مساوی با مجموع دو شعاع است (زیرا نقطهٔ تماس بر خط المرکزین واقعست)

ثالثاً - در دو دایره متقاطع خط المرکزین اقصر از مجموع واطول از تفاضل دو شعاع است (زیرا چون دو مرکز را بیکی از دو نقطه تقاطع وصل کنیم مثلثی حاصل میشود واین حکم در مثلث صادق است)

رابعاً - در دو دایره مماس داخل خط المرکزین مساوی با تفاضل دو شعاع است (زیرا نقطه تماس بر امتداد خط المرکزین واقعست)

خامساً - در دو دایرهٔ متداخل خط المرکزین اقصر است از تفاضل دو شعاع (زیرا تفاضل دو شعاع علاوه بر خط المرکزین شامل قطعه ایست که مابین دو دایره واقع شده)

۲۸۶ - قضیهٔ ۵۹ - عکس احکام پنجگانهٔ فوق صحیحست از این قرار

۱- اگر $\text{م}_1 \text{م}_2 > \text{ش}_1 + \text{ش}_2$ دو دایره متخارجند

۲- اگر $\text{م}_1 \text{م}_2 = \text{ش}_1 + \text{ش}_2$ « مماس خارجند

۳- اگر ر۱ ر۲ < م۱م۲ < ر۱ + ر۲ متقاطعند

۴- اگر م۱م۲ = ر۲ - ر۱ مماس داخلند

۵- اگر م۱م۲ < ر۲ - ر۱ متداخلند

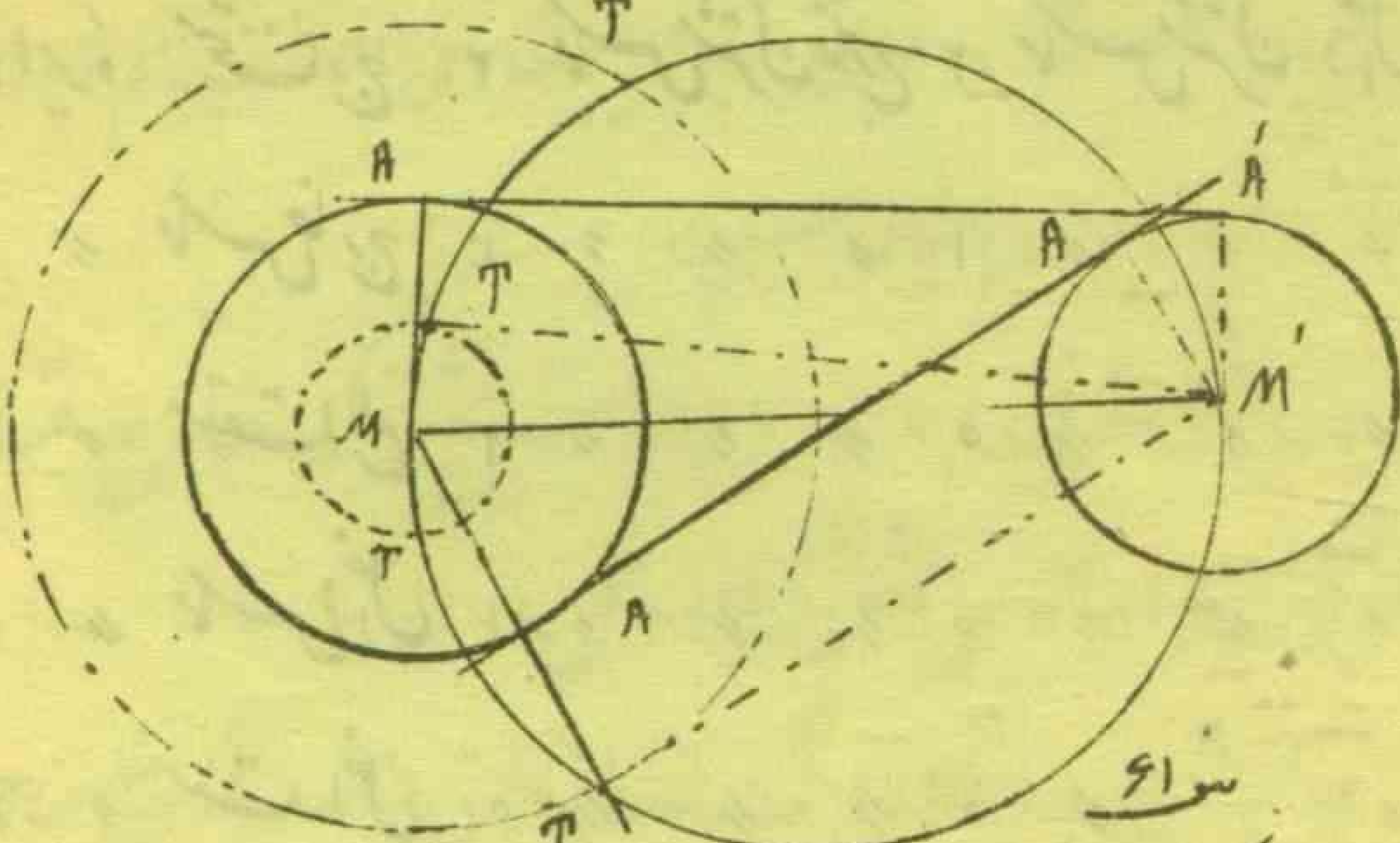
اثبات این احکام بدلیل خلف است مثلاً وقتی خط المرکزین مساوی با مجموع دو شعاع باشد با هیچیک از اوضاع پنجگانه جز مماس خارج مطابقه حاصل نمیشود

هـ — مماسهای مشترک بر دو دایره

۲۸۷ — تعریف — مماس مشترک خطی است که بر دو دایره مماس باشد حال اگر هر دو نقطهٔ تماس در یک سمت خط المرکزین واقع شود آن را مماس مشترک خارج والا مماس مشترک داخل گویند

۲۸۸ — فرض میکنیم AA' مماس مشترکی بر دو دایره (ر و M) و (ر′ و M′) و ر′ < ر باشد دو شعاع MA و $M'A'$ که بدو نقطه تماس وصل شده بر مماس مشترک عمود و لذا متوازی خواهند بود حال اگر از نقطهٔ M' خط $M'T$ را بموازات AA' رسم کنیم شکل $M'TAA'$ مستطیل است و بنابراین زاویهٔ $M'TM$ قائمه شده معلوم میگردد که نقطه T بر محیط دایرهٔ است

بقطر خط المرکزین نمره ۲۴۰) اما از طرف دیگر ملاحظه میشود که وقتی AA'



شکل ۶۱

مماس مشترک خارج باشد قطعه MT مساوی با $r - r'$ و وقتی
AA' مماس مشترک داخل باشد این قطعه مساوی $r + r'$ خواهد بود
پس بر محیط دایرهٔ مرسومه بقطر خط المرکزین نظیر هر مماس مشترک نقطه مانند
T یافت میشود که از نقطهٔ M در صورت اول بفاصلهٔ $r - r'$ و در
صورت ثانی بفاصله $r + r'$ واقعست و از این جمله معلوم میشود
که وجود مماس مشترک منوط براین است که دایرهٔ مرسومه بقطر خط المرکزین با
دایرهٔ ($r \pm r'$ و M) نقطهٔ مشترکی مانند T داشته باشد
و از اینجا قضیهٔ ذیل نتیجه میشود

۲۸۹ - **قضیهٔ ۶۰** - عدهٔ مماسهای مشترک دو دایره بر حسب

وضع نسبی آنها بقرار ذیل است

در دو دایرهٔ متخارج	۲ مماس مشترک خارج	۲ مماس مشترک داخل	
〃 〃 مماس خارج	۲ 〃 〃	۱ 〃 〃	
〃 〃 متقاطع	۲ 〃 〃	۰ 〃 〃	
〃 〃 مماس داخل	۱ 〃 〃	۰ 〃 〃	
〃 〃 متداخل	۰ 〃 〃	۰ 〃 〃	

عکس قضیه نیز صحیح است مثلاً دو دایره که فقط دو مماس مشترک قبول کنند متقاطعند و قس علیهذا (اثبات بدلیل خلف میشود) ×

۲۹۰ - مسئلهٔ اصلی - میخواهیم مماسهای مشترک دو دایرهٔ مفروضه را رسم کنیم

حل - دایره بقطر خط المرکزین رسم نموده از مرکز دایره اعظم با دو شعاع ر - ر' و ر + ر' دو دایره رسم میکنیم و از نقاط T مشترکه بین این دو دایره و دایرهٔ اول بمرکز دایرهٔ اعظم وصل مینمائیم و بالاخره از نقاط تلاقی این خطوط با دایره اعظم یعنی نقاط A خطوطی بموازات MT رسم میکنیم تا مماسهای مشترک مطلوب بدست آیند س ۱۶

عدهٔ جوابهای مسئله موافق وضع دو دایرهٔ ق ۶ معلوم میشود

۲۹۱ - **تنبیه** - وقتی دو دایره متساوی باشند رسم مماسهای خارج که باخط المرکزین موازی میشوند خیلی سهل است

۲۹۲ - **قضیهٔ ۱۶** - دو مماس مشترک خارج متساویند و کذلک دو مماس مشترک داخل

طریقهٔ برهان - کافی است قطعاتی از دو مماس را که بین نقطه تقاطعشان و دو نقطه تماس واقعند جمع یا تفریق کنیم

۲۹۳ - **فرع** - قطعه خطی که مماس خارج یا (داخل) از مماس داخل (یا خارج) جدا میکند با مماس خارج یا (داخل) مساوی است

طریقهٔ برهان - بوسیلهٔ ق ۱۶ و تبدیل قسمتهای مماس داخل بقسمتهای مماس خارج و بالعکس حکم ثابت میشود

تمرینات

مسئلهٔ ۱ - میخواهیم دایرهٔ رسم کنیم که بر نقطه A با دایرهٔ (ح - M) مماس شده و بر نقطه B که در داخل یا خارج دایرهٔ مفروض واقعشده بگذرد

حل - چون AB وتری از دایرهٔ مطلوبه است مرکز آن نقطه تقاطع عمود منصف

این خط با شعاع A M خواهد بود (هرگاه نقطه B بر مماسی که بر نقطهٔ A از دایرهٔ مفروض رسم شود واقع گردد مسئله محال است)

مسئلهٔ ۲ - دایرهٔ بشعاع مفروض $ر_2$ رسم کنید که با دایرهٔ ($ر_1$. M_1) مماس شده و بر نقطه مفروضه A بگذرد

طریقهٔ حل - دایرهٔ ($ر_2$ + $ر_1$ و M) بر مرکز دایرهٔ مطلوبه مرور میکند

بحث اگر $ر_2$ کوچکتر از $ر_1$ باشد ممکن است نقطهٔ A را در داخل دایرهٔ ($ر_1$ و M_1) نیز فرض کرد اما در اینصورت مرکز دایرهٔ مطلوبه بر محیط دایرهٔ ($ر_2$ - $ر_1$ و M_1) واقع میشود

مسئله ۳ - میخواهیم دایرهٔ بشعاع ر رسم کنید که با دو دایره متخارج ($ر_1$ و M_1) ($ر_2$ و M_2) مماس شود

ملاحظه - شعاع مفروض ر موافق چهار حالت ممکنه ذیل تابع بعضی شرایط است که باید تحقیق نمود

اولاً - باید دایرهٔ مطلوبه هر دو دایره را از خارج تماس کند

ثانیاً - 〃 〃 〃 〃 داخل تماس کند

ثالثاً - 〃 〃 با دایرهٔ اول مماس داخل و با دوم مماس خارج شود

رابعاً - باید دایرهٔ مطلوبه با دایرهٔ دوم مماس داخل و با دایرهٔ اول مماس خارج گردد

مسئله ۴ - دایره بشعاع R رسم کنید که با دایره (R و M) و خط AB مماس شود (شرط امکان مسئله چیست)

مسئله ۵ - دایره رسم کنید که با خط AB و نقطه C از دایره (R_1 و M_1) مماس شود

طریقه حل - مماس مشترک بر دو دایره خط AB را قطع میکند و بدین وسیله میتوان نقطه تماس را بر خط AB بدست آورد

مسئله ۶ - دو دایره متقاطع مفروض است میخواهیم بر یکی از دو نقطه تقاطع قاطعی چنان مرور دهیم که مجموع دو وتر حاصل بطول معین l باشد

طریقه حل - دو عمود یکه از دو مرکز بر قاطع مطلوب فرود آیند بانضمام خطیکه از یکی از دو مرکز بموازات قاطع رسم شود وسیله تعیین مثلثی قائم الزاویه میشوند که وترش خط المرکزین و یک ضلعش نصف l میباشد (پس شرط امکان مسئله اینست $\frac{l}{2} < M_2M_1$)

مسئله ۷ - بر دایره (R و M) مماسی رسم کنید که فاصله های آن از دو نقطه مفروضه A و B اولاً متساوی باشد - ثانیاً - مجموعاً طول معلوم شود - ثالثاً - تفاضلشان طول معینی باشد

طریقه حل - بمناسبت احکام راجعه بخط میانه ذوزنقه و فاصله بین منتصف دو قطعه آن سؤال دوم و سوم راجع برسم مماس مشترکی بر دو دایره معلوم میگردد

کتاب سوم
مساحت اشکال مستقیمة الخط و تناسب اشکال

فصل اول

۱ـ مساحت مستطیل و مربع

۲۹۴ـ **تعریف ۱** قسمتی از سطح راکه در درون شکلی واقع و بمحیط آن محدود است وسعت آن شکل نامند

۲۹۵ـ **تعریف ۲** ـ دو شکل را معادل یا متعادل گویند هرگاه از حیث وسعت یکسان باشند

۲۹۶ـ **فرع ۱**ـ دو شکل متساوی متعادلند مثلاً جمیع مثلثات متساویه یا دوایریکه بیک شعاع باشند اشکال متعادله میباشند

۲۹۷ـ **فرع ۲** ـ دو شکل که از جمع یا تفریق اشکال متساویه حاصل شده باشند متعادلند و لو اینکه متساوی نباشند

۲۹۸ـ **تعریف ۲** ـ واحد سطح مربعی است که ضلعش واحد طول باشد مثلاً موافق اینکه واحد طول ذرع یا متر فرض شود واحد سطح ذرع مربع یا متر مربع

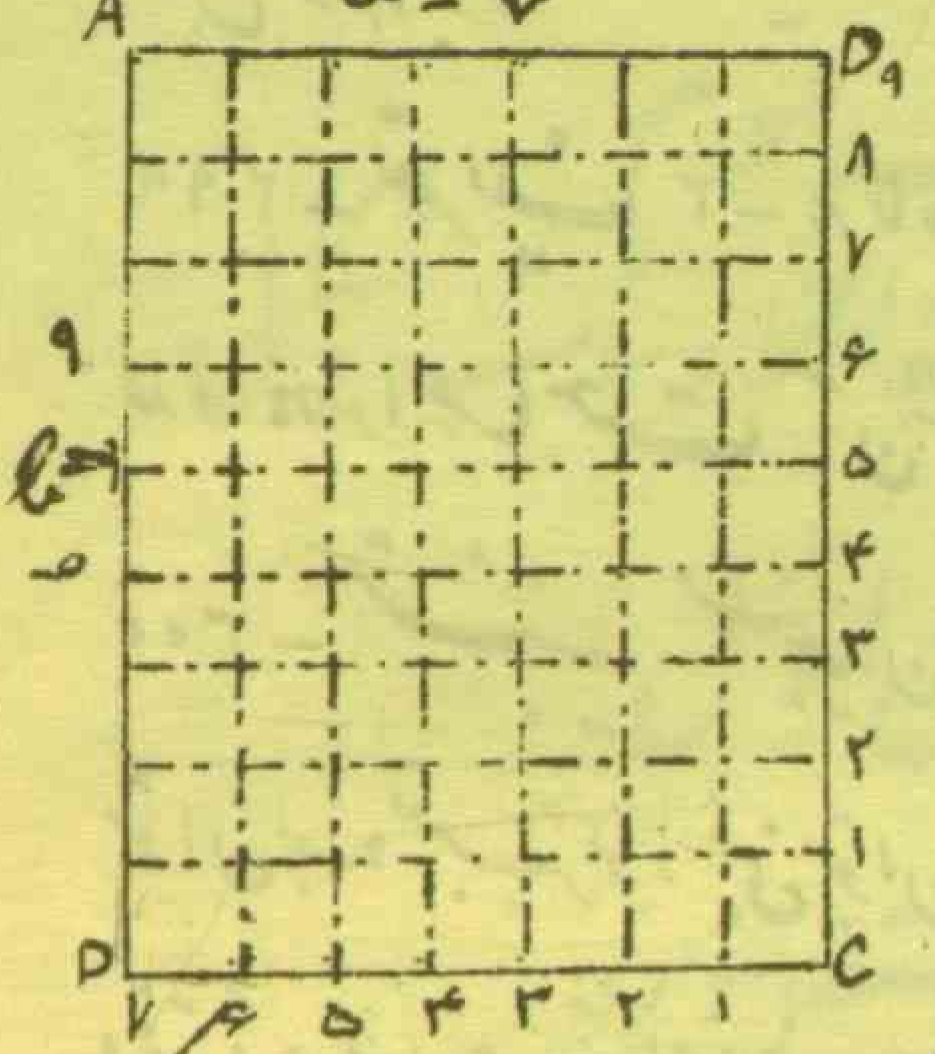
مربع خواهد بود

۲۹۹ - **تعریف** ۲ - هرگاه وسعت شکلی n برابر واحد سطح باشد عدد n را **مساحت** آن شکل گویند

۳۰۰ - **تنبیه** - سنجیدن مساحت اشکال براین فرض است که خطوط آن شکل را بتوان بعدد تعبیر نمود یعنی بتوان نسبت ابعاد شکل را با واحد سنجید و بنابراین وقتی در مساحات از حاصل ضرب دو خط گفتگو میشود باید ملتفت بود که مقصود حاصل ضرب اعدادی است که اندازهٔ آن دو خط باشند

۳۰۱ - **قضیهٔ** ۶۲ - **مساحت مستطیل مساویست با حاصلضرب دو ضلع مجاور آن که معمولاً یکی را قاعده و دیگری را ارتفاع گویند**

برهان - اوّلاً فرض میکنیم a و b که اندازهٔ دو ضلع مجاورند عدد صحیح باشند پس اگر AB را (ش ۶۲) به a جزو و BC را به b جزو متساوی منقسم کنیم هر جزو یک واحد طول است و چون از نقاط تقسیم AB خطوطی بموازات BC رسم کنیم مستطیل مفروض به a مستطیل متساوی منقسم میشود حال چون از نقاط تقسیم BC نیز خطوطی بموازات AB رسم کنیم هر مستطیل جزو



به b مربع متساوی که هر کدام یک واحد
سطح است مجزی میگردد و بنابراین مستطیل
مفروض شامل a برابر b یعنی $b \times a$
مربع خواهد بود پس در این حالت

$$s = a \times b$$

ثانیاً فرض میکنیم a و b یا یکی از آن دو کسری باشد بعد از تجنیس هر دو را بیک
مخرج تحویل نموده فرض میکنیم $a = \frac{m}{n}$ و $b = \frac{m'}{n}$ حال اگر $\frac{1}{n}$
واحد را واحد طول قرار دهیم اندازهٔ a و b دو عدد صحیح m
و m' و اندازهٔ ضلع واحد سطح عدد صحیح n میشود پس موافق آنچه اولاً ثابت
نموده ایم بحسب واحد جدید مساحت مستطیل $m \times m'$ و مساحت واحد اصلی
سطح n^2 خواهد بود و از اینجا معلوم میشود که وسعت مستطیل مفروض $\frac{m \cdot m'}{n \cdot n}$
برابر واحد اصلی سطح است

و بنابراین $s = \frac{m \cdot m'}{n \cdot n} = \frac{m'}{n} \cdot \frac{m}{n} = a \cdot b$

ثالثاً در صورتیکه اضلاع مستطیل اصم باشند چون قضیه برای جمع مقادیر تقریبی
آنها بطریق فوق محقق میشود در این حالت نیز محقق است

۳۰۲ – **نتیجه ۱** – مساحت مربعی که ضلعش a باشد مساوی با مجذور a یعنی a^2 خواهد بود و بهمین مناسبت است که مجذور عدد را مربع آن نیز گویند

۳۰۳ – **نتیجه ۲** – حاصل ضرب دو خط را بواسطهٔ مستطیلی که دو خط مفروض قاعده وارتفاع آن باشند مینمائیم دراینصورت حاصل ضرب به مسطح موسوم میشود

تمرینات

مقدمةً متذکر میشویم که مجموع یا تفاضل دو مستطیل که دریک بعد مشترک باشند مستطیل دیگریست که درهمان بعد با دو مستطیل مفروض مشارک است

مسئله ۱ – صحت تساوی ذیل را بواسطهٔ ترسیم تحقیق کنید

$$ab \pm ac = a(b \pm c)$$

مسئله ۲ – میخواهیم بوسیلهٔ ترسیم تساوی ذیل را برهن کنید

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

مسئله ۳ – صحت تساوی ذیل را بترسیم توضیح کنید

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

مسئله ۴ – چگونه بترسیم ثابت میشود که مسطح مجموع دو خط در تفاضلشان مساوی با تفاضل دو مربع آنهاست یعنی $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

مسئلهٔ ۵ - تساویهای ذیل را بترسیم توضیح و مبرهن کنید

۱- $(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$

۲- $(a+b)(c-d) = ac + bc - ad - bd$

۳- $(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd$

۴- $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$

۵- $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

ب - مساحت متوازی الأضلاع و ذوزنقه و کثیر الأضلاع

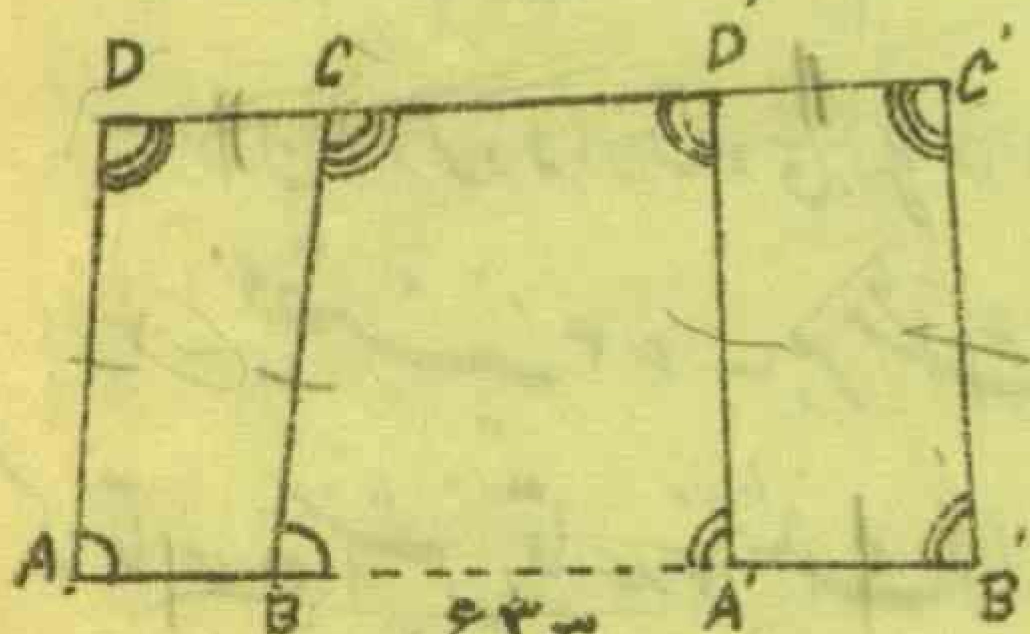
۳۰۴ - **تعریف** - فاصلهٔ دو ضلع متوازی الأضلاع را ارتفاع و هریک از آن دو ضلع را قاعده نامند.

۳۰۵ - **فرع ۱** - هر متوازی الأضلاع دو ارتفاع دارد

۳۰۶ - **فرع ۲** - هرگاه قاعده های دو متوازی الأضلاع متحد الارتفاع بریک خط مستقیم قرار گرفته باشند دو ضلع مقابل قاعده ها نیز بر امتداد خطی موازی با خط اول واقع میشوند (زیرا فاصلهٔ دو خط متوازی همه جا بیک اندازه است)

۳۰۷ - **قضیهٔ ۱** - دو متوازی الأضلاع که در قاعده و ارتفاع متساوی باشند معادلند

برهان – متوازی الاضلاع $A'B'C'D'$ را مسئله ۶۳ بطوری قرار میدهیم که $A'B'$ بر امتداد AB قرار گیرد و بموجب فرع ۳۰۶ $C'D'$ نیز بر امتداد CD واقع میشود و دو ذوزنقه $AA'D'D$ و $B'BCC'$ حاصل میگردد.



در این دو شکل از طرفی $\hat{A}=\hat{B}$ و $\hat{A'}=\hat{B'}$ و $\hat{D}=\hat{C}$ و $\hat{D'}=\hat{C'}$ (زوایای متقابله داخل و خارج) و از طرف دیگر $AA'=BB'$ (چرا) و $AD=BC$ و $A'D'=B'C'$ و $DD'=CC'$ پس دو ذوزنقه متساویند

حال چون از شکل $ADCB'$ یک مرتبه ذوزنقه $AA'D'D$ و یک مرتبه ذوزنقه $BB'C'C$ را نقصان کنیم البته دو باقیمانده که دو متوازی الاضلاع مفروضند معادل میشوند زیرا از مفروق منه واحد دو مفروق متساوی کاسته شد.

۳۰۸ – نتیجه ۱ – هر متوازی الاضلاع معادل مستطیلی است که بر همان قاعده و ارتفاع باشد

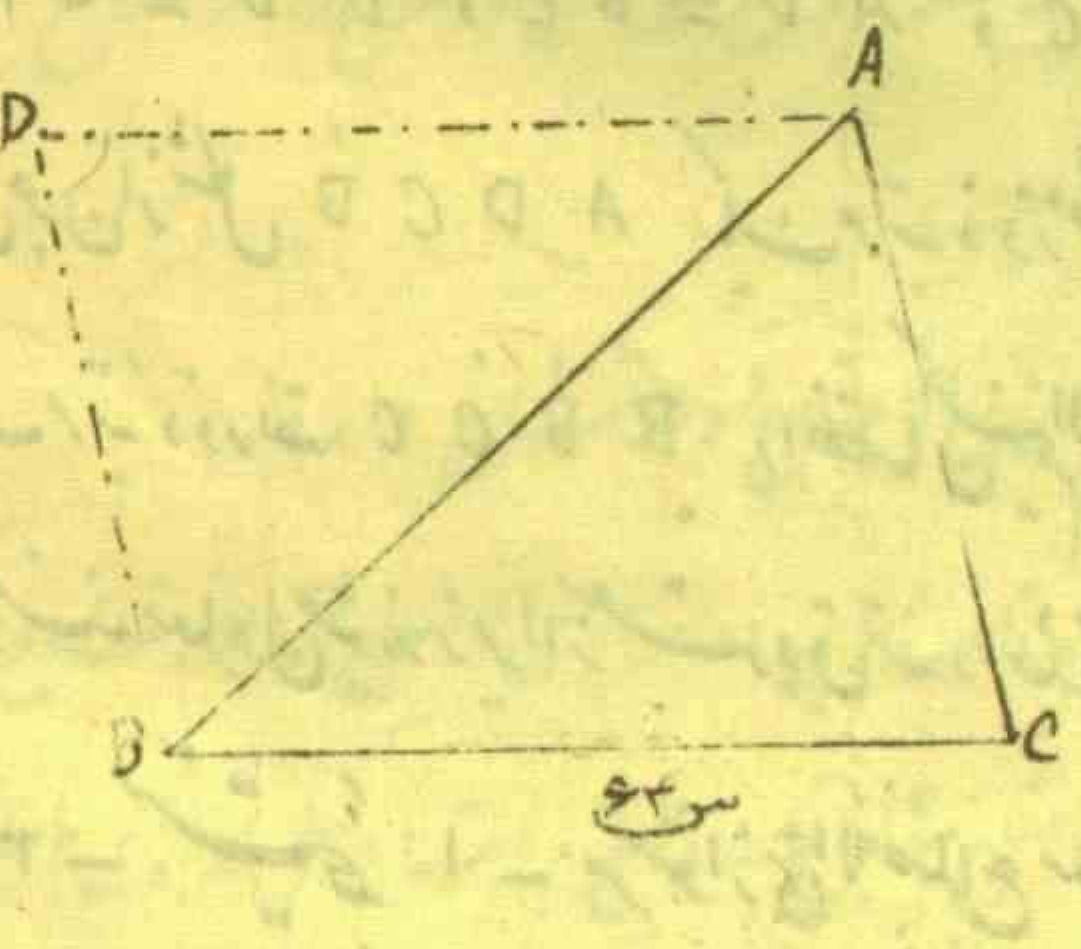
۳۰۹ – نتیجه ۲ – مساحت متوازی الاضلاع مساوی با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع است

۲۱۰ - فرع - دو متوازی الاضلاع معادل که در قاعده (یا ارتفاع) متساوی باشند در ارتفاع (یا قاعده) نیز متساویند

دلیل انحکم را هم بطریق خلف دهم بواسطهٔ تقسیم دو مقدار متساوی بیک مقدار میتوان ذکر کرد که از تساوی $ox = oy$ نتیجه میشود

۲۱۱ - قضیهٔ ۶۴ - هر مثلث نصف متوازی الاضلاعی است که قاعده اش قاعدهٔ مثلث و ارتفاعش ارتفاع آن باشد

زیرا چون از راس B ـ ۶۴ ـ BD را بموازات AC و از راس A خط AD را موازی با AC رسم کنیم دو مثلث ABD و ABC متساوی میشوند



و بنابراین هر یک نصف متوازی الاضلاع ADBC که بر قاعده و ارتفاع مثلث ABC است خواهند بود

۳۱۲ - نتیجهٔ ۱ - مساحت مثلث نصف حاصل ضرب هر ضلعی در ارتفاع

نظیر همان ضلع است

$$S = \frac{1}{2} a\, h_a = \frac{1}{2} b\, h_b = \frac{1}{2} c\, h_c$$

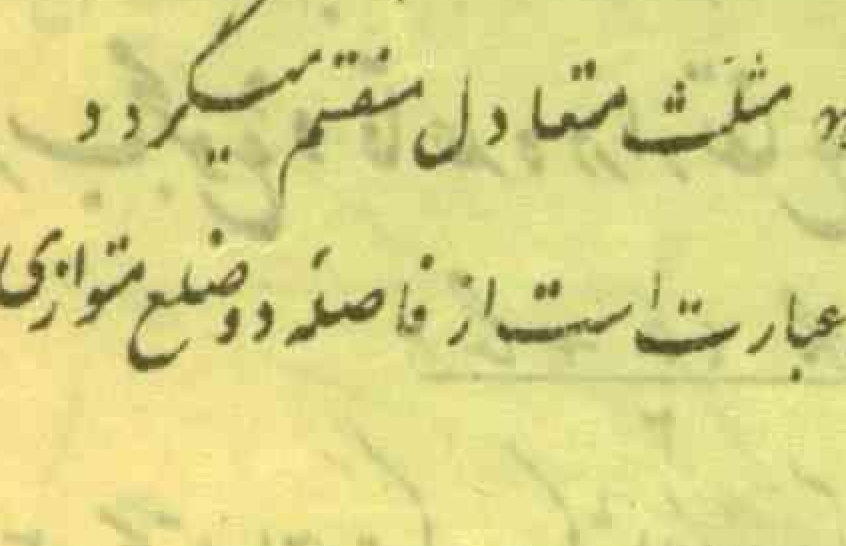
۳۱۳ــ نتیجهٔ ۳ ــ مثلثاتیکه در قاعده و ارتفاع مساوی باشند معادلند

۳۱۴ــ فرع ۱ ــ در دو مثلث معادل که قاعدهٔ آنها مشترک باشد دو رأس مقابل قاعده بر خطی موازی آن واقع میشود

فرع ۲ ــ هرگاه یک ضلع مثلث را بر n جزو متساوی منقسم ساخته نقاط تقسیم را برأس وصل کنیم آن مثلث بر n مثلث متعادل منقسم میگردد

۳۱۵ــ تعریف ــ ارتفاع ذوزنقه عبارت است از فاصلهٔ دو ضلع متوازی که آنها را دو قاعدهٔ ذوزنقه نامند

۳۱۶ــ قضیهٔ ۶۷ ــ هر ذوزنقه معادلست با مثلثی که ارتفاعش ارتفاع ذوزنقه و قاعده اشمجموع دو قاعده ذوزنقه باشد



برهان ــ نقطه A را بواسطهٔ ضلع DC س ۶۵ وصل نموده امتداد میدهیم تا امتداد قاعدهٔ BC را بر نقطه F قطع کند فورا ملاحظه میشود که دو مثلث AED و CEF متساویند (زض ز) پس اگر بجای مثلث ADE

FCE را قرار دهیم وسعت شکل تغییر نمیکند و ذوزنقه ABCD بمثلث ABF مبدل میشود اما چون در این مثلث ضلع BF را قاعده فرض کنیم دیده میشود که ارتفاع مثلث همان ارتفاع ذوزنقه است و قاعدهٔ آن BF مرکبست از دو جزو BC و CF که جزو ثانی مساوی با AD است و لهذا $BF = BC + AD$

۳۱۷ - نتیجه - مساحت ذوزنقه مساوی است با نصف حاصل ضرب مجموع دو قاعده در ارتفاع

$$s = \frac{h(a+b)}{2}$$

۳۱۸ - بجهة مساحت کردن کثیر الاضلاع آنرا بمثلثات فقط یا بچند مثلث و چند ذوزنقه مجزی و هر یک را جدا جدا مساحت نموده مساحات را جمع میکنیم پس فرع ذیل محقق است

فرع - مساحت کثیر الاضلاع را وقتی میتوان معین دانست که شکل بمثلثات و ذوزنقه‌ها تجزیه شده و قواعد و ارتفاعات این اشکال معین باشد (رجوع به مساحی)

۳۱۹ - فرع - اگر r r_a r_b r_c اشعهٔ دوایر محاطیه مثلث و $2p$ محیط آن باشد چهار رابطهٔ ذیل برای مساحت مثلث برقرار است

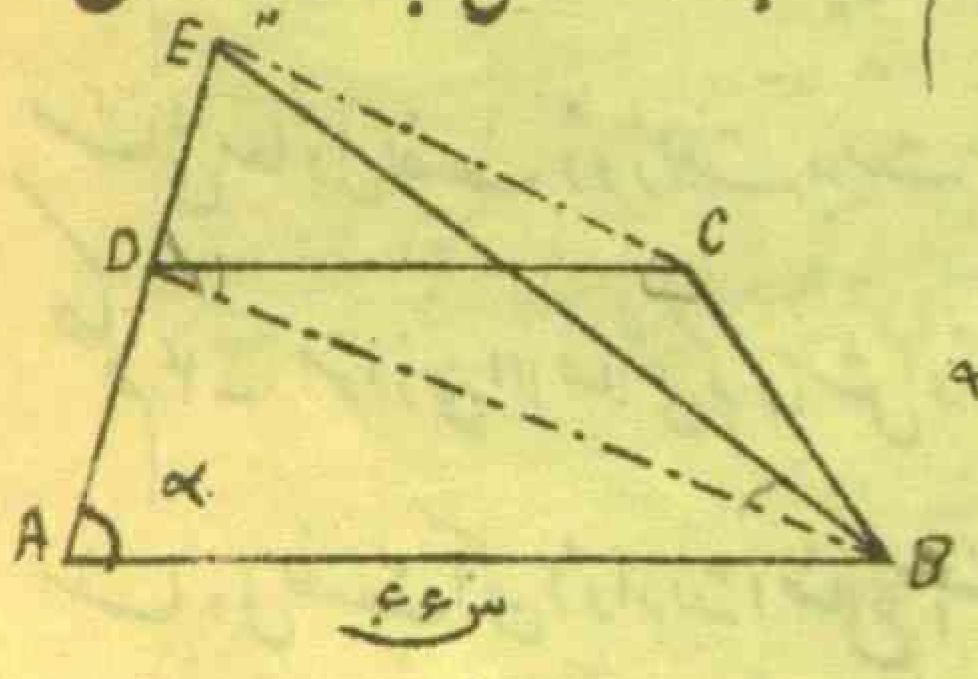
۱ - $s = r \cdot p$ ۲ - $s = r_a (p - a)$

۳- (ب − ح) $ی_ب$ = ر ∠۴ (ج − ح) $ی_ج$ = ر

طریقه برهان - در هر حال از وصل مرکز دائره برؤس شکل مفروض مثلث حاصل میشود که از ترکیب آنها بجمع و تفریق شکل مفروض بدست میآید

۳۲۰ - تعریف - مقصود از تبدیل شکل یافتن شکلیست معادل با شکل مفروض که از حیث صورت با آن مختلف باشد

۳۲۱ - مسئله - میخواهیم ذوار بعة الاضلاعی را با حفظ یک ضلع و یک زاویه مجاور آن بمثلثی تبدیل کنیم



حل - چون ضلع AB و زاویهٔ α محفوظ است لازم میاید راس سوم مثلث مطلوب نقطهٔ E بر استقامت AD واقع گردد ولی برای تعادل مثلث و ذوار بعة الاضلاع لازم است که دو مثلث BDC و BDE متعادل باشند وچون این دو مثلث در قاعده BD مشترکند باید دو راس C و D بر خطی موازی با BD واقع باشند واز اینجا ترسیم ذیل استنباط میشود

رسم - قطر BD را وصل نموده از نقطهٔ C خطی بموازات آن امتداد دهیم تا امتداد AD را در نقطه E قطع کند و EB را وصل میکنیم EAB مثلث مطلوبست

تمرینات

اولاً ـــ مطلوب است براهین احکام ذیل

حکم ۱ ـ هرگاه در دو مثلث دو ضلع نظیر بنظیر متساوی و زاویهٔ بینهما مکمل باشند دو مثلث متعادلند (باید تساوی دو ارتفاع را ثابت کرد)

حکم ۲ ـ قسمت اعظم سه میانهٔ مثلث را به شش مثلث متعادل تجزیه میکنند

حکم ۳ ـ چون در ذوزنقه وسط یکی از دو ساق را بدو انتهای دیگری وصل کنیم مثلثی معادل نصف ذوزنقه بدست میاید

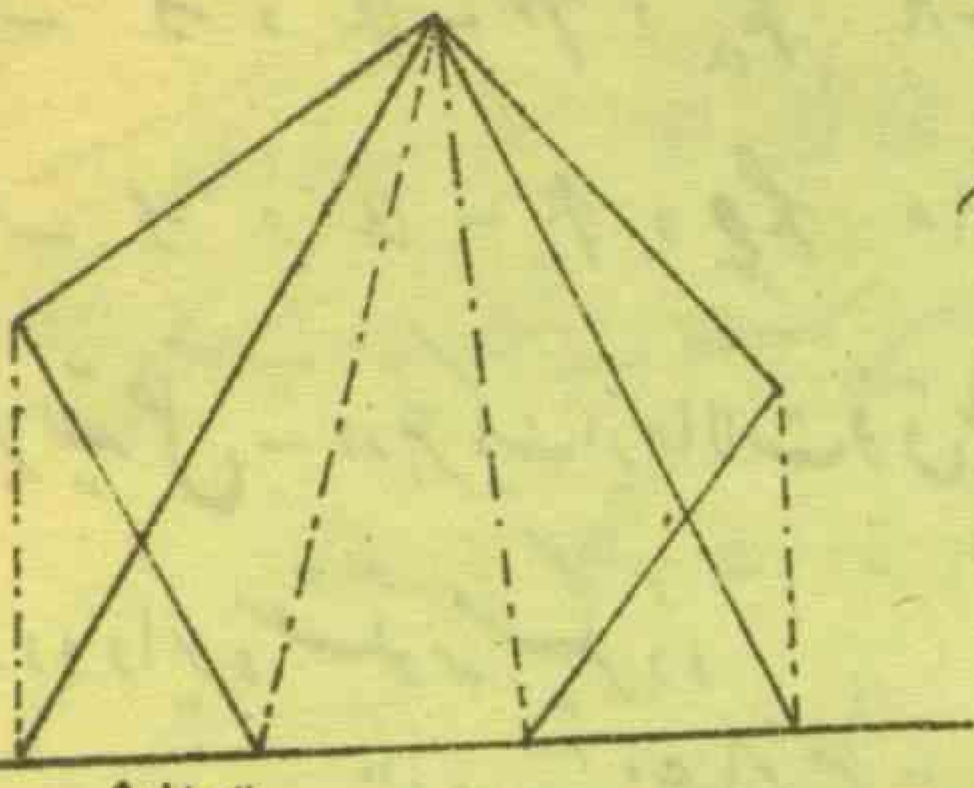
حکم ۴ ـ متوازی الاضلاعی که راسش اوساط اضلاع ذواربعة اضلاعی باشد معادل نصف آن ذواربعة اضلاع است

ثانیاً ـــ مسائل ذیل را حل کنید

مسئلهٔ ۱ ـ متوازی الاضلاع را با حفظ یک ضلع (یعنی یک ضلع آن تغییر نکند) اولاً بمستطیل ثانیاً به لوزی تبدیل نمائید

مسئلهٔ ۲ ـ مثلثی را با حفظ یک ضلع بیکی از اشکال ذیل تبدیل نمائید ۱ ـ بمثلث متساوی الساقین ۲ ـ بمثلث قائم الزاویه ۳ ـ بمثلثی که زاویهٔ مقابل بضلع محفوظ مساوی زاویهٔ α بوده باشد

مسئلهٔ ۳ ـــ میخواهیم ذوزنقه را بمستطیل تبدیل کنیم



مسئله ۴ـ کثیرالاضلاعی n ضلعی را به کثیرالاضلاع $n-1$ ضلعی تبدیل کنید س۶۷

مسئله ۵ـ کثیرالاضلاعی n ضلعی را بمثلث تبدیل نمائید س۶۷

مسئله ۶ـ مثلثی را با حفظ یک زاویه بمثلثی دیگر تبدیل کنید که یک ضلع آن زاویه بطول معینی باشد

مسئله ۷ـ مثلثی را با حفظ یک زاویه بمثلثی دیگر تبدیل کنید که ارتفاع وارد بر یکی از دو ضلع آن زاویه بطول معینی باشد

مسئله ۸ـ متوازی الاضلاعی را با حفظ یک زاویه بمتوازی الاضلاع دیگری تبدیل کنید که یک ضلعش بطول b باشد

مسئله ۹ـ مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید

۱ـ $2p$ و s و h_a . ۲ـ $a-p$ و s_a و h_a

۳ـ r و s و s_a . ۴ـ r و s_a و s_b .

۵ـ r و $2p$ و h_a . ۶ـ r و $2p$ و s_b .

۷- r و $p-a$ و h_a ۸- r و $p-c$ و S_h

۹- r و $p-a$ و h_{bc} ۱۰- r و h_a و S_h و S_{ha}

طریقه حل - در هر یک از حالات فوق بالاخره مسئله راجع بترسیم مماس مشترک بر دو دایره معلومه میگردد

ج - تعادل متوازی الاضلاعهائیکه در قاعده و ارتفاع مشترک نیستند

۳۲۲ - **قضیه ۶۶** - چون از نقطه مفروضه بر قطر متوازی الاضلاع دو موازی با اضلاع آن رسم نمائیم چهار متوازی الاضلاع حاصل میگردد که از آنها دو شکلی که شامل قطر مفروض نیستند معادلند

برهان - س ۶۸ (۱) $\triangle ABC = ADC$

و (۲) $\triangle AKF = AFG$

و (۳) $\triangle EFC = FCH$



چون رابطهٔ (۲) و (۳) را از رابطهٔ (۱) تفریق کنیم معلوم میشود که $KBEF = GDHF$

۳۲۳ - **نتیجه ۱** - دو متوازی الاضلاع $ABEG$ و $ADHK$ همچنانکه

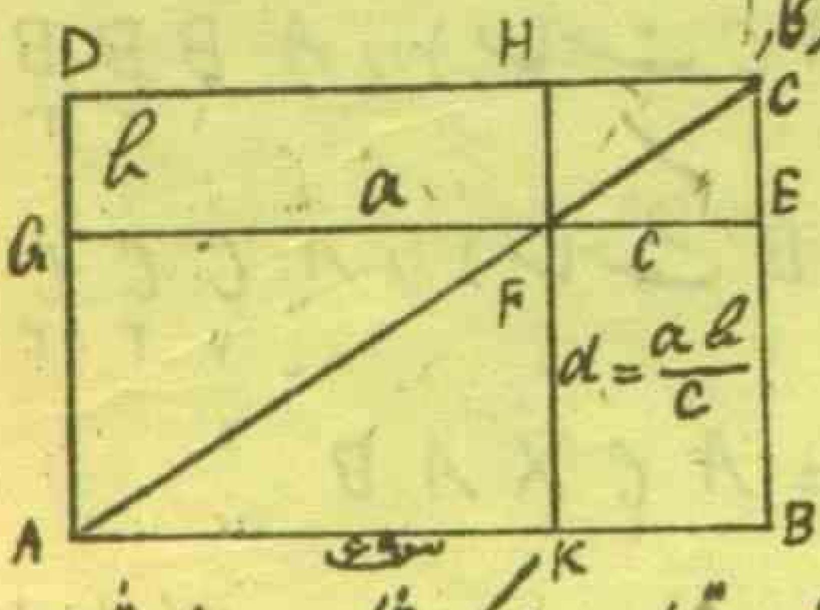
CBKH نیز معادلند CDGE

۳۲۴ـ نتیجه ۲ ـ هرگاه شکل اصلی مستطیل باشد اشکال حاصله مستطیل خواهند بود

پس $a \cdot b = c \cdot d$ س ۶۹

یا $d = \frac{a\,b}{c}$

۳۲۵ ـ فرع ـ خارج قسمت $\frac{a\,b}{c}$ قاعدهٔ مستطیل است معادل $a\,b$ که ارتفاعش c باشد و برای یافتن آن بطریق هندسی وسیلهٔ ذیل درکار است



دو ضلع مقابل مستطیل b . a را باندازهٔ c امتداد داده شکل را مانند شکل سابق تمام میکنیم بقسمیکه یک رأس مستطیل $a \cdot b$ برقطر واقع شود چنانکه در شکل ۶۹ نمود شده

۳۲۶ ـ **تعریف** ـ موقع عمودیراکه از نقطهٔ مفروضه برمستقیم مفروض فرود آید تصویر آن نقطه گوئیم و چون از طرفین قطعه خطی دو عمود بر مستقیمی فرود آوریم قسمتی از مستقیم مفروض را که مابین دو موقع دو عمود واقع میشود تصویر قطعه مفروضه گوئیم و در این صورت مستقیم مفروض را محور تصویر یا باختصار محور خوانیم

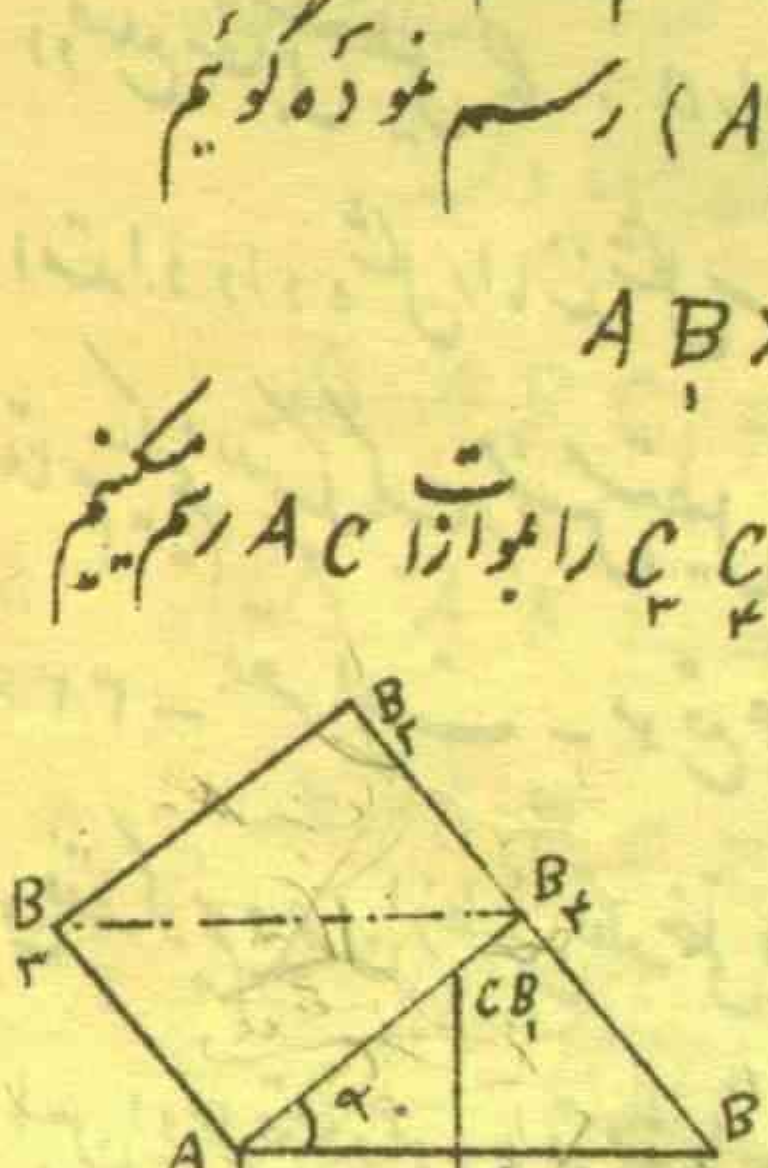
۳۲۷ ـ فرع ـ هرگاه دو ضلع زاویه را بر یکدیگر تصویر کنیم اگر زاویه حاده است انتهای دو تصویر بر ضلع زاویه واقع میشود و اگر زاویه منفرجه باشد دو انتها بر امتداد ضلع میافتد

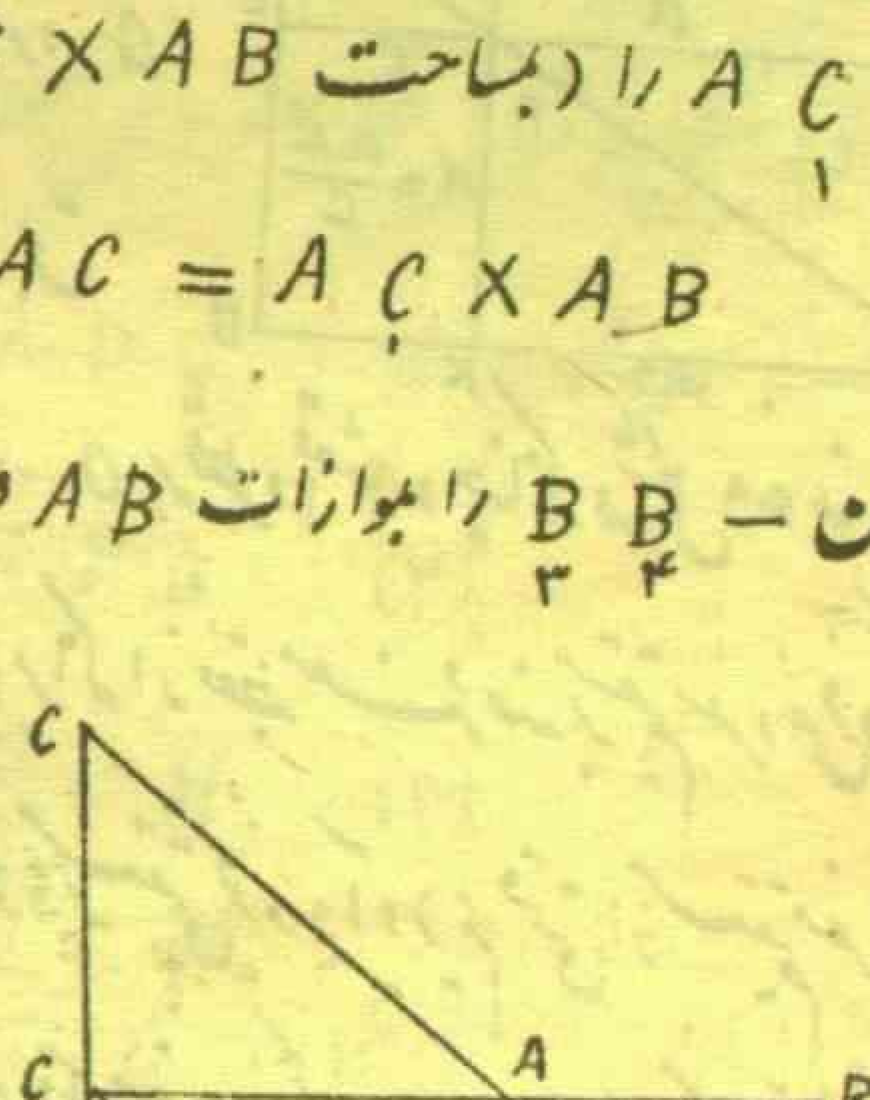
۳۲۸ _ قضیهٔ ۶۷ - هرگاه دو ضلع محدود زاویه را بر یکدیگر تصویر نموده بر هر یک مستطیلی طرح کنیم که بعد دومش تصویر ضلع دیگر باشد دو مستطیل مرسوم معادل خواهند بود (قضیهٔ تصویری)

فرض میکنیم دو ضلع زاویهٔ A بدو نقطهٔ B و C محدود باشد عمود BB_1 را بر AC فرود آورده تا نقطه B_2 باندازهٔ AC امتداد داده مستطیل (س ۷۰ و ۷۱) $B_3B_2B_1A$ را (بمساحت $AB_1 \times AC$) تمام میکنیم و بهمین طریق مستطیل $C_3C_2C_1A$ را (بمساحت $AC_1 \times AB$) رسم نموده گوئیم

$$AB_1 \times AC = AC_1 \times AB$$

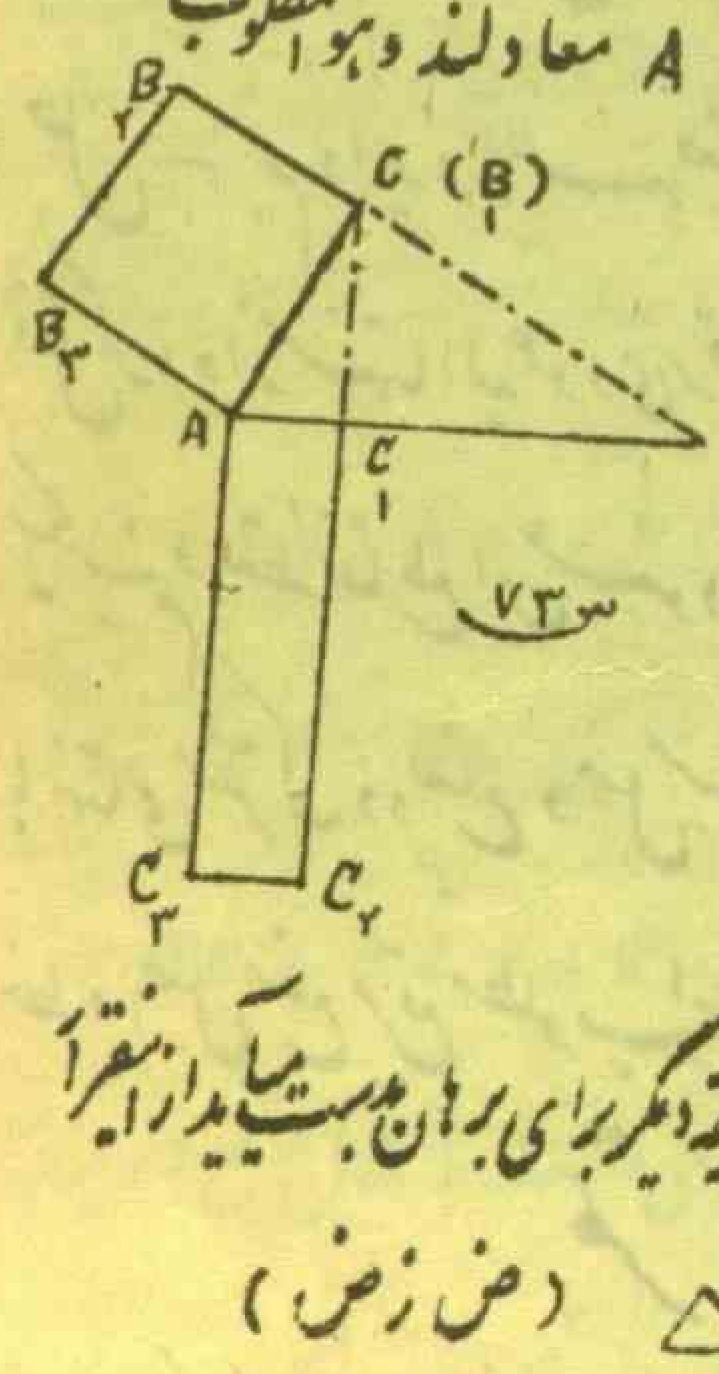
برهان - B_3B_4 را بموازات AB و C_3C_4 را بموازات AC رسم میکنیم

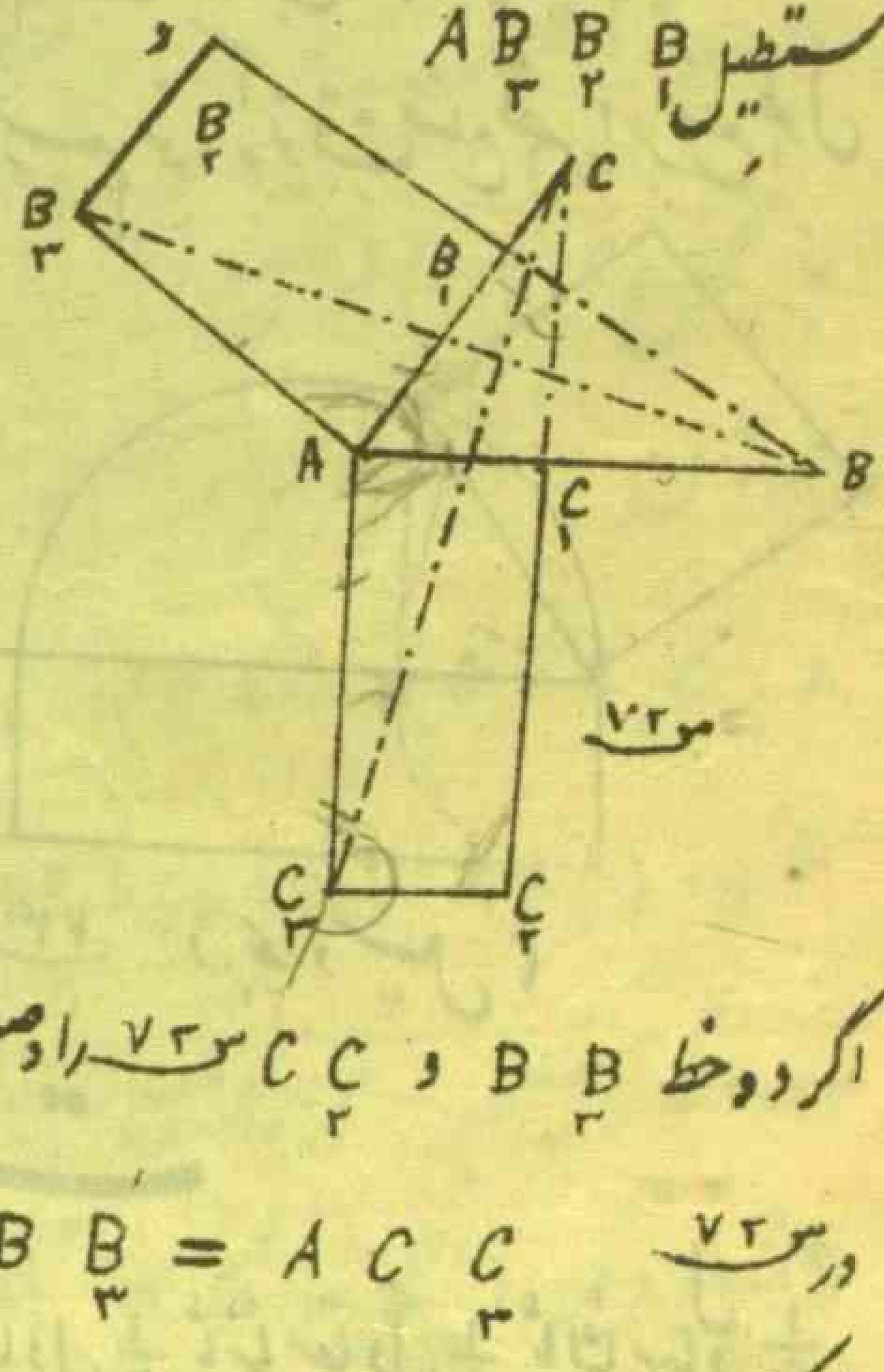




دو متوازی الاضلاع B_4B_3BA و CC_4C_3A بقاعده برابر و ضلع AB و

بترتیب با دو ضلع AC_2 و AC متساوی و زاویهٔ B_3AB با CAC_3 متساویت (چونکه هرکدام علیحده یک زاویهٔ قائمه و یک جزء مشترک دارند) اما متوازی الاضلاع AB_4B_3B معادلست با مستطیل $AB_1B_2B_3$ (بچه دلیل) و متوازی الاضلاع ACC_4C_3 با مستطیل $AC_1C_2C_3$ معادلست پس دو مستطیل $AB_1B_2B_3$ و $AC_1C_2C_3$ معادلند و هو المطلوب





اگر دو خط BB_3 و CC_3 را وصل نمائیم طریقهٔ دیگر برای برهان بدست میآید از اینقرار

در ش ۷۲ $\triangle ABB_3 = ACC_3$ (ض ز ض)

لیکن $\triangle ABB = \frac{AB_1B_2B_3}{2}$ (ق ۶۴)

و $\triangle ACC = \frac{AC_1C_2C_3}{2}$ (ق ۶۴)

و چون نیمی از دو مستطیل معادل شدند تعادل دو مستطیل واضح است

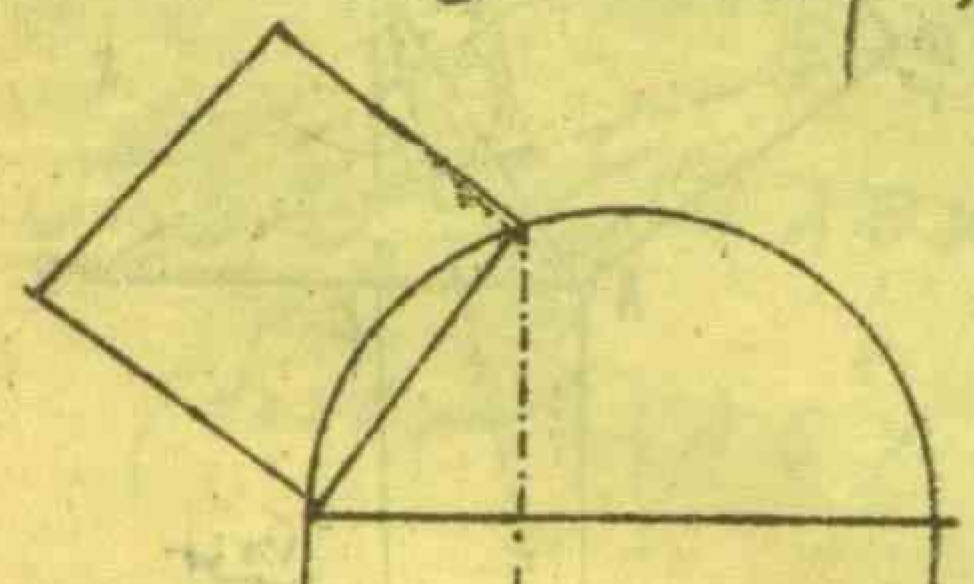
۳۹ ـ ۲ ـ اگر زاویهٔ ACB ش ۷۳ قائمه باشد نقطهٔ C با B مشتبه شده مستطیل مبدل بمربع ضلع AC میگردد و از اینجا نتیجهٔ مهم ذیل بدست میآید

نتیجه – مربع هر ضلع از مثلث قائم الزاویه معادل است با مستطیلی که قاعده‌اش وتر و ارتفاعش تصویر آن ضلع بر وتر باشد

یعنی $\overline{AC}^2 = AB \times AC'$ و $\overline{BC}^2 = AB \times BC'$

۳۳۰ – مسئله اصلی – میخواهیم مستطیلی را بمربع تبدیل کنیم

حل – نیم دایره بقطر ضلع اطول رسم نموده آنوقت ضلع اقصر را بر ضلع اطول نقل کرده از منتهاالیه عمودی بر قطر اخراج میکنیم و نقطه تقاطع این عمود را با دایره با نهای مشترک دو ضلع وصل مینمائیم



خط واصل ضلع مربع مطلوب است (بجه دلیل) س ۷۴

تمرینات

مسئله ۱ – میخواهیم مربعی اولاً معادل $\frac{1}{2}$ ثانیاً معادل $\frac{1}{5}$ ثالثاً معادل $\frac{1}{6}$ مربع مفروض رسم کنیم

مسئله ۲ – میخواهیم مربعی را بمستطیلی تبدیل کنیم که یک ضلعش بطول ح باشد

طریقه حل – اگر خط ح بزرگتر از ه که ضلع مربع است باشد نیم دایره بقطر ح والا نیم دایره مرسوم بقطر ه وسیله حل مسئله میشود

مسئله ۳ - میخواهیم مثلثی را بمربعی تبدیل کنیم

مسئله ۴ - مربعی را بمثلثی متساوی الساقین تبدیل کنیم که قاعده a یا ارتفاع یکی از آن معلوم است

مسئله ۵ - میخواهیم ذوزنقه را بمربع تبدیل کنیم

د - قضیهٔ فیثاغورث و نتایج آن

۳۳۱ - قضیهٔ ۸۶ - در مثلث قائم الزاویه مربع وتر مساوی است با مجموع مربعین دو ضلع دیگر (این قضیه در نزد قدما بقضیهٔ عروس معروف بوده)

برهان - زیرا چنانکه از نتیجهٔ نمره ۳۲۹ معلوم میشود $AC^2 = AB \cdot A\underset{.}{C}$ و $BC^2 = AB \cdot B\underset{.}{C}$ (رجوع به نمره ۷۲۳) از جمع این دو تساوی حاصل میشود

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot A\underset{.}{C} + AB \cdot B\underset{.}{C} = AB(A\underset{.}{C} + B\underset{.}{C}) = AB^2$$ و هو المطلوب

۳۳۲ - نتیجه - مربع هر ضلع زاویهٔ قائمه مساوی است با فضل مربع وتر بر مربع ضلع دیگر ($a^2 = c^2 - b^2$ و $b^2 = c^2 - a^2$)

۳۳۳ - فرع - هرگاه دو کثیر الاضلاع را بمربع تبدیل نموده دو ضلع آنها را اضلاع مثلثی قائم الزاویه قرار دهیم مربع وتر این مثلث مساوی با مجموع دو کثیر الاضلاع خواهد بود (جمع دو شکل)

۳۳۴ - فرع - چون دو شکل را بمربع مبدل نموده ضلع مربع اعظم را وتر مثلثی قائم الزاویه

قرار دهیم که ضلع مربع دیگر یک ضلعش باشد مربع ضلع سوم این مثلث تفاضل دو شکل خواهد بود.

(تفریق دو شکل)

۳۳۵ — قضیهٔ ۶۹ — مربع ضلع مقابل بزاویهٔ حادهٔ مثلث معادل است با مجموع مربعین دو ضلع دیگر منهای ضعف مسطح یکی از این دو ضلع در تصویر دیگری بر همین ضلع

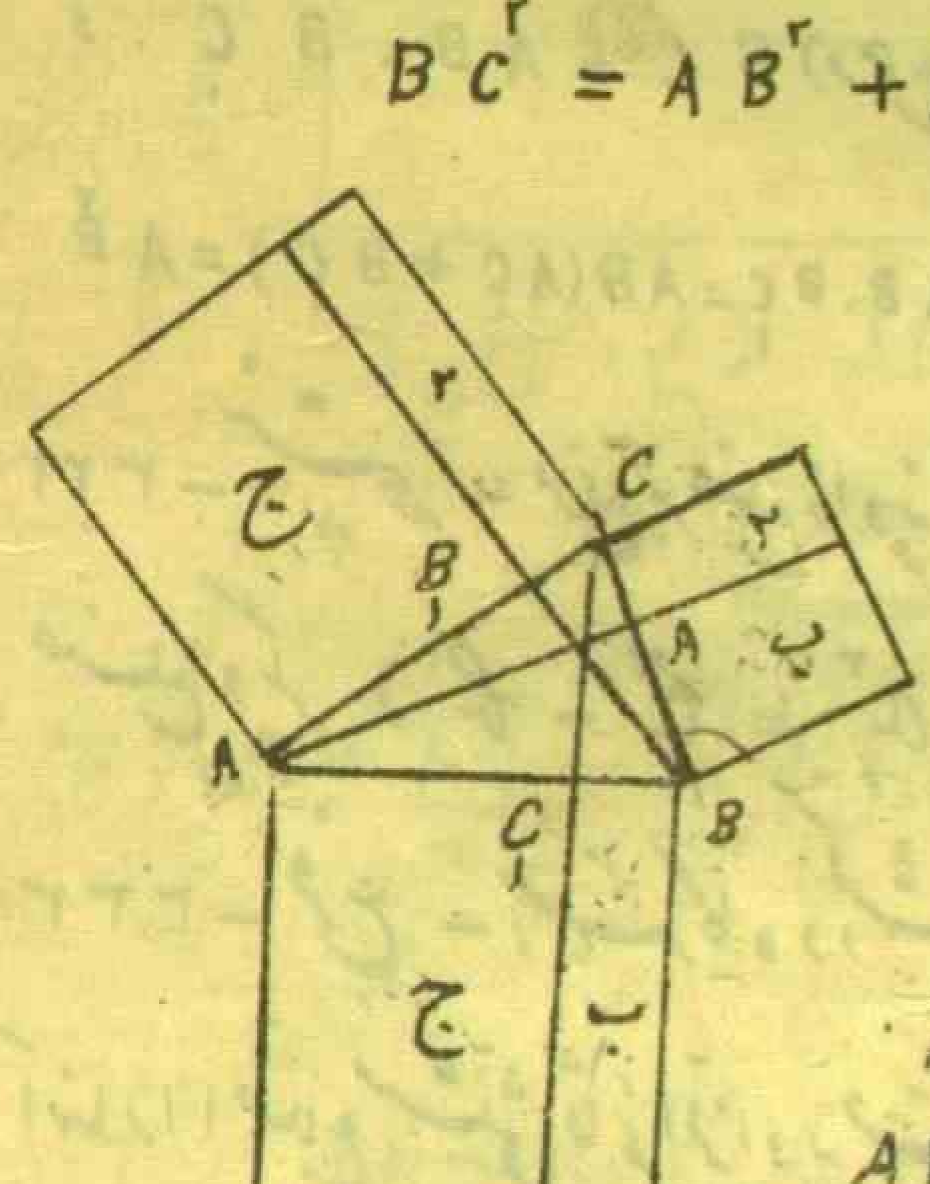
مثلاً در مثلث ABC س ۷۵

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC_1$$

یا

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AB_1$$

برهان —



$$BC \cdot CA_1 = AC \cdot CB_1 \quad (2)\ (2)$$

و $$BC \cdot BA_1 = AB \cdot BC_1 \quad (\text{ب})\ (\text{ب})$$

و $$AB \cdot AC_1 = AC \cdot AB_1 \quad (\text{ج})\ (\text{ج})$$

لیکن $$AB \cdot CB_1 = AC^2 - AC \cdot AB_1 \quad (2)\ (\text{ج})$$

و $$AB \cdot CB_1 = AB^2 - AB \cdot AC_1 \quad (\text{ب})\ (\text{ج})$$

از جمیع این پنج رابطه باملاحظه اینکه $BC^2 = BC \cdot CA_1 + BC \cdot BA_1$ (۲) (ب)

بعد از اسقاط جمل مشترک از طرفین ونقل $AB \times AC$ بطرف ثانی حاصل میشود

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,AB \cdot AC$$

۳۳۶ - قضیهٔ ۷۰ - مربع ضلع مقابل بزاویهٔ منفرجه مثلث معادل است با مجموع مربعین دو ضلع دیگر با ضعف مسطح یکی از آن دو ضلع دیگر بر همین ضلع

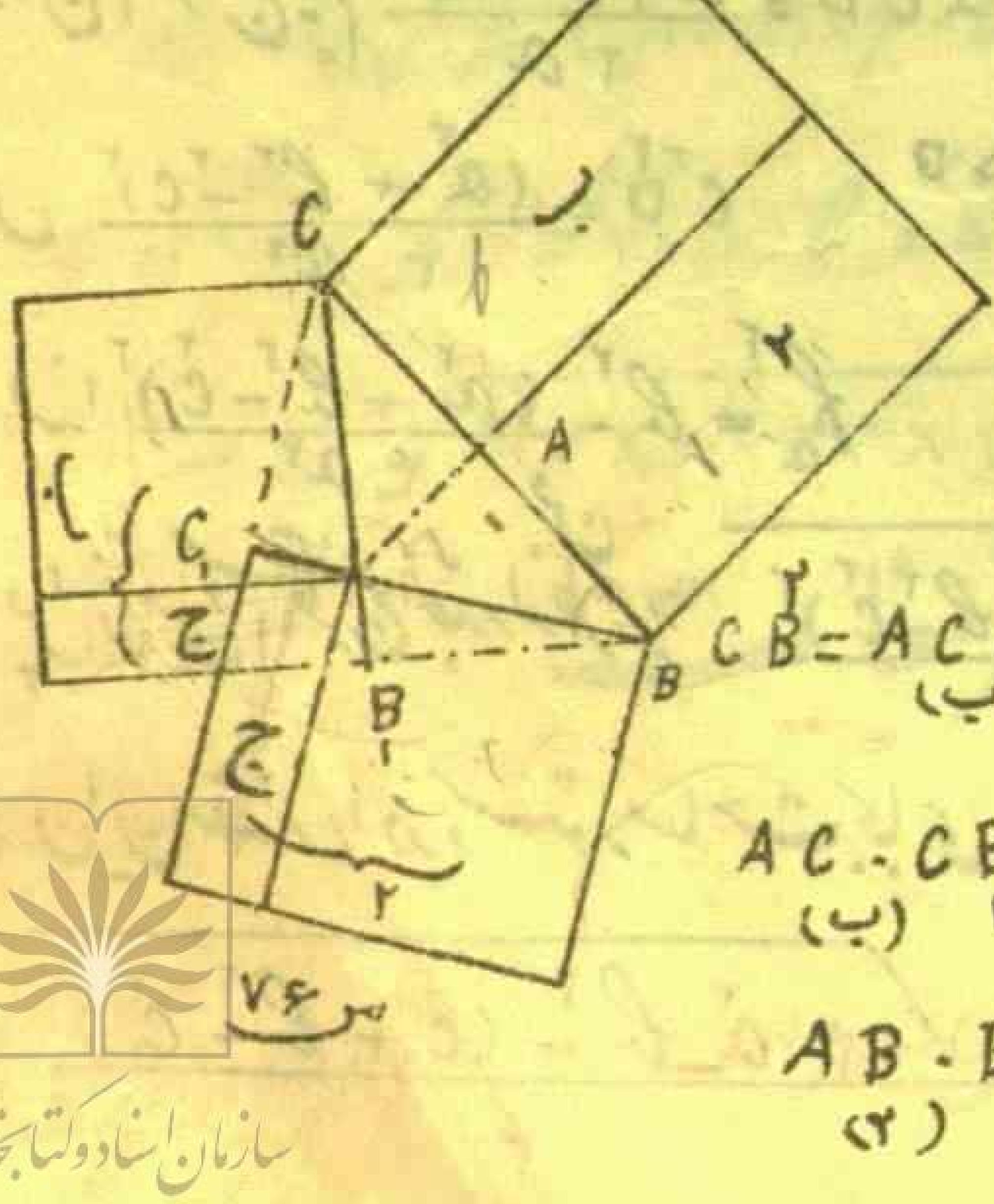
مثلاً در مثلث ABC س ۷۶

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2\,AB \cdot AC_1$$

یا

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2\,AC \cdot AB_1$$

برهان - چون قضیهٔ تصویر را دربارهٔ دو زاویهٔ C و B اعمال کنیم حاصل میشود



$$CB \cdot CA_1 = AC \cdot CB_1$$ (ب) (ب)

و

$$CB \cdot BA_1 = AB \cdot BC_1$$ (۲) (۳)

و از جمع آنها

$$CB^2 = AC \cdot CB_1 + AB \cdot BC_1$$ (ب) (ب) (۲)

اما چون

$$AC \cdot CB_1 = AC^2 + AC \cdot AB_1$$ (ب)

و

$$AB \cdot BC_1 = AB^2 + AB \cdot AC_1$$ (۲) (ج)

معلوم میشود که $AC\cdot CB + AB\cdot CB = AC^2 + BC^2 + (AC\cdot AB + AB\cdot AC)$

لیکن بقضیهٔ تصویری $\underset{(ج)}{AC}\cdot \underset{(ا)}{AB} = AB\cdot \underset{(ج)}{AC}$ بقسمی که ممکن است بین الهلالین

طرف ثانی را به $2AB\cdot AC$ یا به $2AC\cdot AB$ تبدیل نموده بعد از این تبدیل

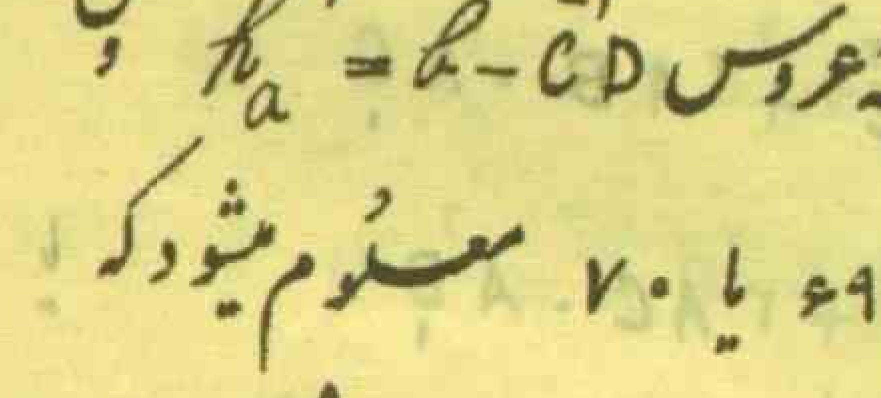
چون بجای طرف اول مساوی آن BC^2 را قرار دهیم حکم قضیه نتیجه میشود

۳۳۷ - **مسئله** - مطلوب است مساحت مثلثی که سه ضلعش معلوم باشد

حل - سه ضلع مثلث ABC (س ۷۷) را موافق معمول a و b و c

فرض میکنیم پس $S = \frac{a}{2}\times h_a$ لیکن بحکم قضیهٔ عروس $h_a^2 = b^2 - \overline{CD}^2$ ولی

موافق اینکه $\hat{C}$ حاده یا منفرجه باشد بقضیه ۶۹ یا ۷۰ معلوم میشود که



(س ۷۷)

$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2a\cdot CD$$

از آن استخراج میکنیم $\pm CD = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$

پس $\overline{CD}^2 = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}$

و لهذا $h_a^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}$

یا پس از تجنیس و استخراج جذر از طرفین $h_a = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{2a}$

چون این مقدار را در دستور مساحت بجای h_a قرار دهیم نتیجه میشود.

$$S = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (c + b^2 - c^2)^2}}{4}$$

اگرچه همین دستور را میتوان برای مساحت مثلث از روی اضلاع بکار برد لیکن چون مقدار تحت رادیکال را موافق قواعد جبری بعوامل تجزیه کنیم دستور فوق خیلی ساده و متقارن میشود از اینقرار

$$4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=\left[(a+b)^2-c^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]=$$

$$(a+b+c)(c+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$$

حال فرض میکنیم $a+b+c=2p$ پس $c+a-b=2p-2b$

و $b+c-a=2p-2a$ و $a+b-c=2p-2c$ آنوقت رابطهٔ فوق

چنین نوشته میشود $2p(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a)$

یا

$$16p(p-a)(p-b)(p-c)$$

و بنابراین $s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

فرض میکنیم $a=$ ۷۷ س م و $b=$ ۵۱ س م و $c=$ ۴۰ س م پس $2p=$ ۱۶۸

$s=\sqrt{۸۴\times۷\times۳۳\times۲۴}=$ ۹۲۴ سانتیمتر مربع

تمرینات

۱- مطلوب است اثبات احکام ذیل

حکم ۱- در هر مثلث مجموع مربعین دو ضلع معادل است با نصف مربع میانهٔ نظیر ضلع سوم

بعلاوه نصف مربع ضلع سوم یعنی مثلاً

$$b^2 + c^2 = 2\,m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

حکم ۲ - در شکل لوز مجموع مربعین دو قطر معادل است با چهار برابر مربع یک ضلع

حکم ۳ - در هر متوازی الاضلاع مجموع مربعین دو قطر معادل است با مجموع مربعات اضلاع

حکم ۴ - در هر ذوار بعة اضلاع مجموع مربعین دو قطر معادل است با مجموع مربعات اضلاع منهای چهار برابر مربع خطی که منتصف دو قطر را وصل کند

ب - مسائل ذیل را حل نمائید

مسئله ۱ - میخواهیم مربعی اولاً مساوی مجموع ثانیاً معادل تفاضل دو مربع معلوم رسم کنیم مطلوب ضلع آن است

مسئله ۲ - مطلوب است ضلع مربعی که n برابر مربع معلومی باشد

طریقه حل - عدد n را مجموع یا تفاضل چندین مربع بدل مینمائیم

مثلاً $(n = 10)$ $10 = 3^2 + 1^2$ و $(n = 60)$ $60 = 8^2 - 2^2$

و $(n = 84)$ $84 = 8^2 + 4^2 + 2^2$ و $(n = 47)$ $47 = 7^2 - 1^2 - 1^2$ وغیره

مسئله ۳ - مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید

۱ـ a و $b^2 + c^2$ و m_b یا m_c

۲ـ a و $c^2 + b^2$ و α یا β یا γ یا h_c یا h_b یا r یا

۳ـ m_a و $c^2 + b^2$ و m_b یا m_c

۴ـ m_a و $c^2 + b^2$ و α یا β یا γ یا h_a یا h_b یا h_c یا r

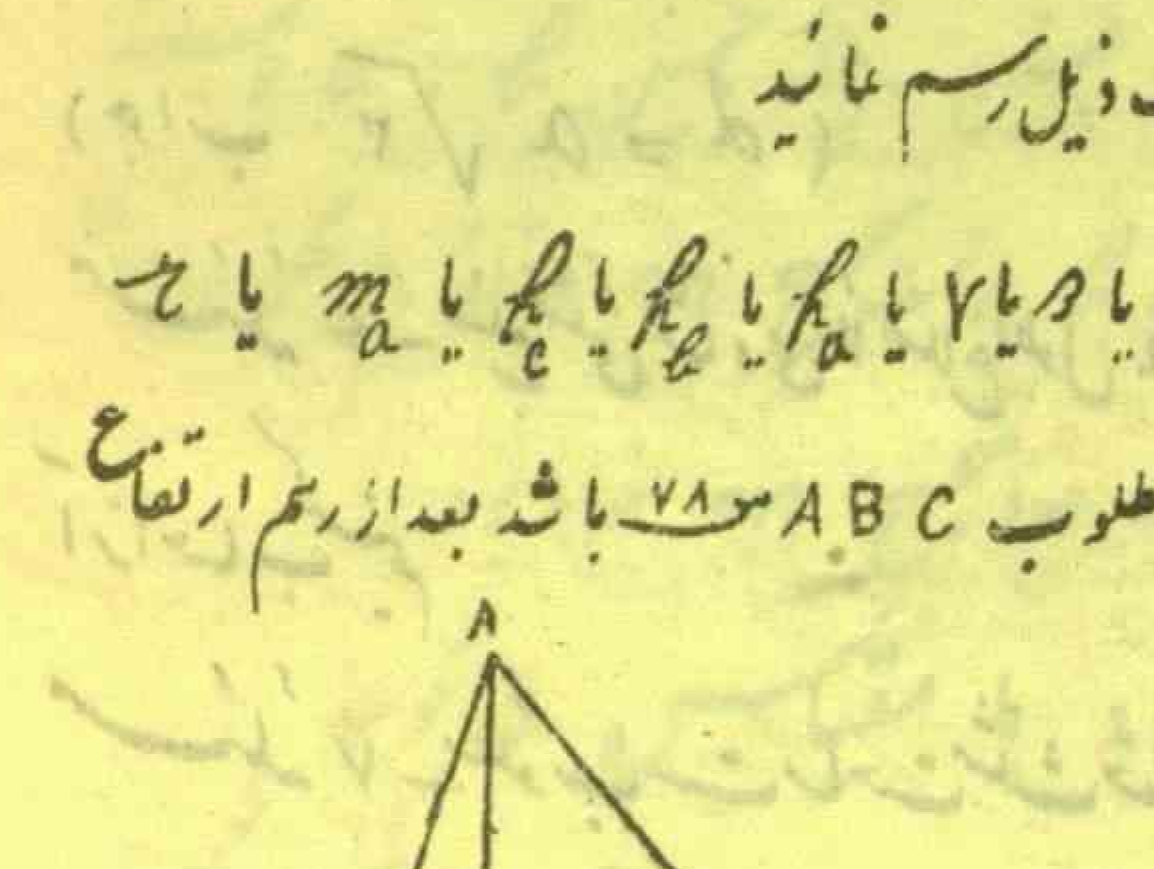
طریقهٔ حل ـ موافق حکم (صفحهٔ ۱۴۰) $a^2 + 2m_a^2 = (c^2 + b^2)2$

و بوسیلهٔ این معادله قطعات لازمه برای رسم مثلث بدست میآید

مسئله ۴ ـ مثلثی از معلومات ذیل رسم نمائید

a و $(l^2 =) c^2 - b^2$ و α یا β یا γ یا h_a یا h_b یا h_c یا m_a یا r

طریقهٔ حل ـ فرض میکنیم مثلث مطلوب ABC س ۷۸ باشد بعد از رسم ارتفاع



AD بموجب قضیهٔ عروس

$b^2 = AD^2 + CD^2$

و $c^2 = AD^2 + BD^2$

پس $b^2 - c^2 = CD^2 - BD^2$

یا $l^2 = (CD + BC)(CD - BD)$

ولی $CD + BD = a$.

پس $b^2 = a(CD - BD)$

از تساوی اخیر بواسطهٔ معلوم بودن a و $b = c^2 - b^2$ مقدار $CD - BD$ که آنرا اختصاراً d فرض میکنیم معلوم میشود (رجوع بشکل) و چون $CD + BD = a$ پس $CD = \frac{a+d}{2}$ و بعد از آنکه CD معلوم شد نقطه D که موقع h است بدست میآید و بقیهٔ مسئله بسهولت حل میشود

مسئلهٔ ـ ۵ ـ ضلع مربعی a است مطلوب است محاسبهٔ طول d که قطر آنست

(جواب $d = a\sqrt{2}$)

مسئلهٔ ۶ ـ ضلع مثلثی متساوی الاضلاع بطول a معلوم است میخواهیم ارتفاع آنرا حساب کنیم

مسئلهٔ ۷ ـ مطلوبست ساحت مثلث متساوی الاضلاع بحسب ضلع آن

(جواب $S = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$)

مسئله ۸ ـ مطلوبست ساحت مثلثی متساوی الساقین با قاعده a و ساق b

(جواب $S = \frac{a}{2}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$)

مسئله ۹ ـ ساحت مثلثی را بحسب اشعهٔ دوایر محاطیه معلوم کنید $S = \sqrt{\rho\rho\rho\rho}$

مسئله ۱۰ ـ اضلاع مثلث معلوم است اشعهٔ دوایر محاطیه را حساب کنید

فصل دوم – تناسب و تشابه اشکال

۱ – نسبت دو قطعه خط و تناسب قطعات

۳۳۸ – **تعریف** – نسبت قطعه a بقطعه b عدهٔ مراتی است که قطعه a شامل قطعهٔ b یا اجزای آن میگردد و بعبارة اخری عددیست که اندازهٔ a خواهد بود وقتیکه قطعه b واحد طول فرض شود

نسبت قطعه a را بقطعهٔ b چنین $\frac{a}{b}$ یا چنین $a : b$ نویسند

۳۳۹ – **فرع** – هرگاه قطعه b مرات صحیح m در قطعهٔ a بگنجد و باقیمانده کوچکتر از b نماند نسبت $\frac{a}{b}$ عدد صحیح m خواهد بود

و در این صورت قطعهٔ b را عاد یا **مقیاس** a گویند

۳۴۰ – **فرع** – اگر نه b مقیاس a و نه a مقیاس b باشند عموماً ممکنست مقیاس مشترکی مانند l بیابیم که در a درست p مرتبه (مثلاً ۴ مرتبه) و در b درست q مرتبه (مثلاً ۵ مرتبه) بگنجد آنوقت واضحست که

$a = p \cdot l$ ، $b = q \cdot l$ بقسمی که

$$\frac{a}{b} = \frac{p \cdot l}{q \cdot l} = \frac{p}{q}$$

پس در این صورت نسبت m یعنی نسبت $\frac{a}{b}$ کسر $\frac{n}{q}$ خواهد بود

(مثلاً $\frac{4}{5}$)

۳۴۱ - فرع - ممکنست هرچند قطعه b را کوچک فرض کنیم باز در هر دو قطعه a و b برات صحیح نگنجد و بعبارة اخری دو قطعه a و b مقیاس مشترک نداشته باشند در این صورت نسبت $\frac{a}{b}$ را اصم خوانند (مثلاً میتوان ثابت نمود که نسبت قطر مربع بضلع آن اصم است)

۳۴۲ - نسبت اصم را همواره بتقریب اندازه میگیرند بطریق که قطعه b را بر q جزو متساوی تقسیم میکند و قطعه a را با یکی از اجزاء می سنجند فرض کنیم a جزو مزبور را n مرتبه شامل شود و باقیمانده کوچکتر از یک جزو بماند معلوم است که نسبت $\frac{a}{b}$ از کسر $\frac{n}{q}$ بزرگتر ولی از $\frac{n+1}{q}$ کوچکتر خواهد بود و بر وجهی که اختلاف $\frac{a}{b}$ با هر یک از دو کسر مزبور از $\frac{1}{q}$ کمتر است و لهذا هرچه q یعنی شمارهٔ تقسیمات b بزرگتر باشد دو کسر $\frac{n}{q}$ و $\frac{n+1}{q}$ بمقدار واقعی $\frac{a}{b}$ نزدیکتر است و عملاً یکی از این دو کسر را بعوض نسبت $\frac{a}{b}$ اختیار میکند و آن را مقدار تقریبی نسبت مفروض و کسر $\frac{1}{q}$ را حد تقریب گویند تقریب کسر $\frac{n}{q}$ را نقصانی و تقریب $\frac{n+1}{q}$ را اضافی نامیده اند

در این دوره نسبت اصم را مسکوت عنه میگذاریم و همواره قطعات را اصحاب

مقیاس مشترک فرض مینمائیم و بعبارهٔ اخری فرض میکنیم همیشه عدد تقریب باندازهٔ کوچک باشد که قابل اعتنا نبوده بتوان مقدار تقریبی را بجای نسبت واقعی قرار داد

۳۴۳ ـ **فرع** ـ نسبت مابین دو قطعه خط مساوی نسبت دو عدد یست (رجوع بحساب) که اندازهٔ دو قطعه مفروض باشند بشرطی که هر دو قطعه با یک واحد سنجیده شده باشند

۳۴۴ ـ **تعریف** ـ هرگاه دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ متساوی باشند چهار خط a و b و c و d را **متناسب** و هر یکرا چهارم **جزو تناسب** مابین سه خط دیگر نامند و تساوی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ را **تناسب** خوانند (برای خواص تناسب بحساب رجوع شود)

۳۴۵ ـ **تعریف** ـ هرگاه در تناسب فوق $b = c$ یعنی $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$ باشد قطعهٔ b را واسطهٔ هندسی مابین دو قطعه a و d و هر یک از دو قطعهٔ اخیر مثلاً a را سوم جزو تناسب مابین دو قطعه دیگر d و b گویند

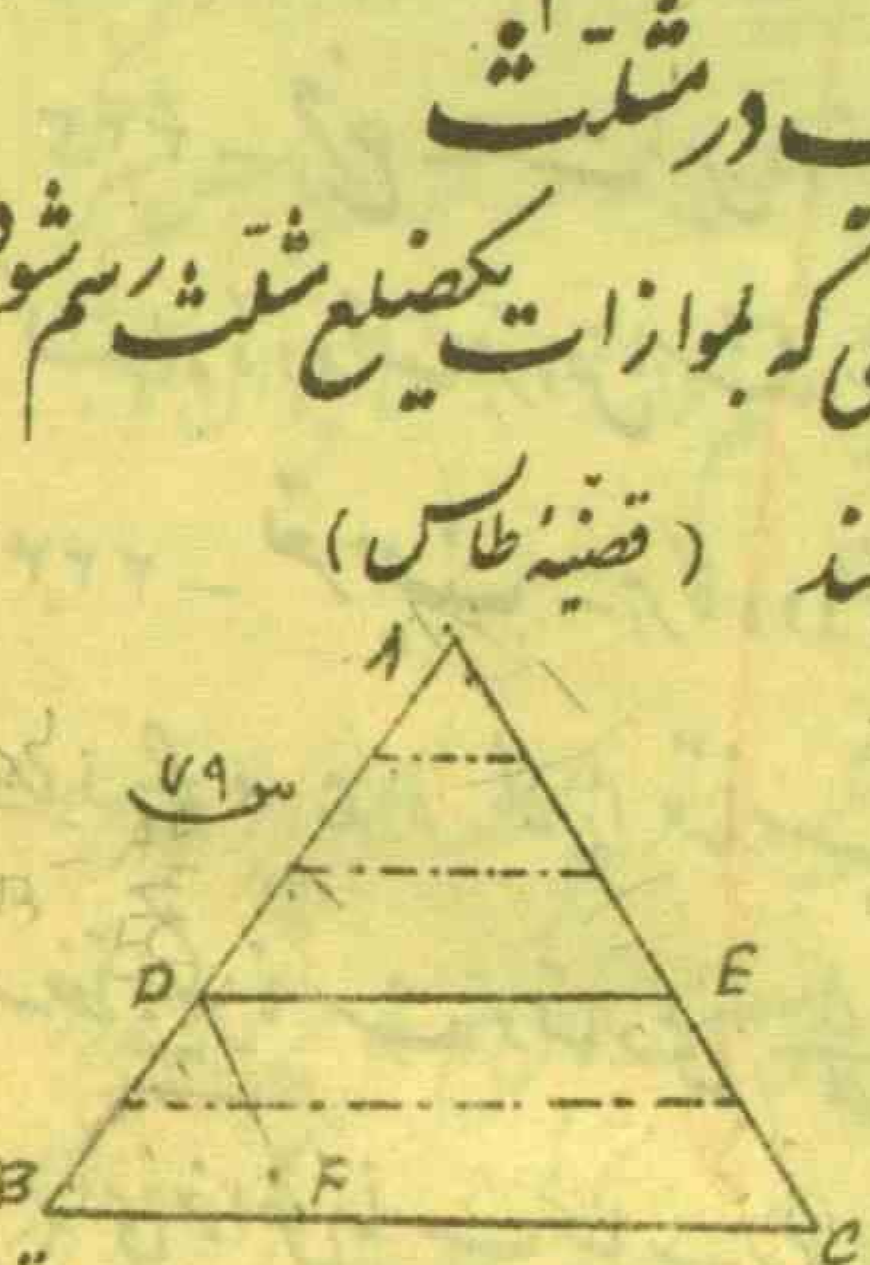
۳۴۶ ـ **فرع** ـ چون در هر تناسب حاصل ضرب طرفین مساوی با حاصل ضرب وسطین است معلوم میشود که مربع واسطه هندسی دو قطعه معادل با سطح آنها است

۳۴۷ ـ **تعریف** ـ هرگاه نقطهٔ c بر خط AB یا امتداد آن تقسیمی فرض شود

گر $\frac{CA}{CB}=\frac{p}{q}$ باشد گوئیم نقطه C خط مفروض را بر نسبت p و q یا بنسبت $\frac{p}{q}$ تقسیم نموده و حال اگر نقطه C ما بین A و B باشد گوئیم قطعه AB بدو قطعه اضافی تقسیم شده والا تقسیم را انفصالی نامیم

ب ـ تناسب در مثلث

۳۴۸ ـ **قضیهٔ ۷۱** ـ هر خطی که بموازات یکضلع مثلث رسم شود دو ضلع دیگر را بتناسب قطع میکند (قضیهٔ طالس)



ف س ۷۹ $DE \parallel BC$

ح ـ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

ب ـ فرض میکنیم $\frac{AD}{DB}=\frac{p}{q}$ باشد

چون AD را بر p جزو و DB را بر q جزو متساوی منقسم نموده بر نقاط تقسیم خطوطی بموازات BC رسم کنیم از سابق میدانیم (فرع ۱۱۲) که AE بر p جزو EC بر q جزو متساوی منقسم میشود که هر جزو را l فرض میکنیم پس

$$\frac{AE}{EC}=\frac{p\cdot l}{q\cdot l}=\frac{p}{q}$$

و بنابراین

$$\frac{p}{q}=\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

۳۴۹ ـ **فرع** ـ ترکیب نسبت از تناسب فوق این دو تناسب نتیجه میشود

$$\frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC} \quad \text{و} \quad \frac{AD+DB}{AD}=\frac{AE+EC}{AE}$$

یا

$$\frac{DB}{EC}=\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$$

یعنی نسبت هر دو ضلع مثلث مثل نسبت قطعاتی است از همان ضلع نظیر بنظیر که بواسطه خطی موازی با ضلع سوم تحدید شده باشد

۳۵۰ ـ فرع ـ چون DF را بموازات AC رسم کنیم این تناسب حاصل میشود $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{FC}$ اما FC = DE (زیرا DFCF متوازی الاضلاع است)

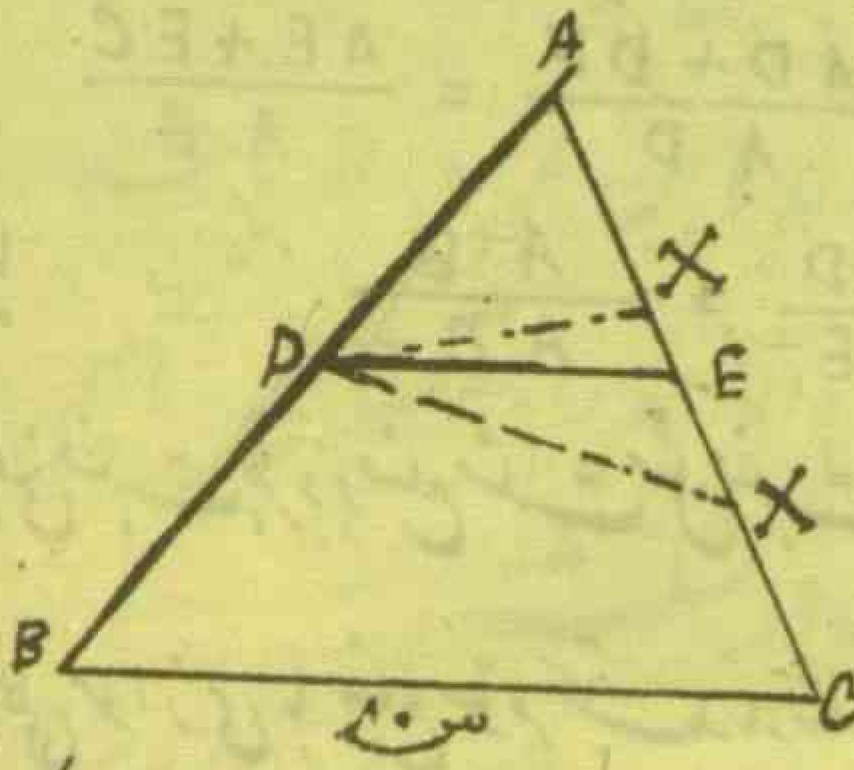
پس بنتیجه میشود

$$\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}$$

یعنی نسبت دو ضلع قطع شده بدو قطعهٔ مجاور راس مثل نسبت ضلع سوم است بقطعهٔ قاطع و بعبارة اخری دو مثلث ABC و ADE متناسب الاضلاعند

۳۵۱ ـ قضیهٔ ۷۲ ـ هر خطی که دو ضلع مثلثی را متناسب قطع کند با ضلع سوم مثلث موازی است (عکس قضیهٔ طالس)

ب ـ (خلف) ـ اگر خطی که از نقطه D ~~سه ۸۰~~ بموازات BC رسم شود بر نقطهٔ E مرور نکند ناچار AC را بر نقطهٔ دیگر مانند X قطع میکند و این تساوی حاصل است (ق ۷۱)



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AX}{XC}$$

لیکن بالفرض $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

پس $\frac{AX}{XC} = \frac{AE}{EC}$

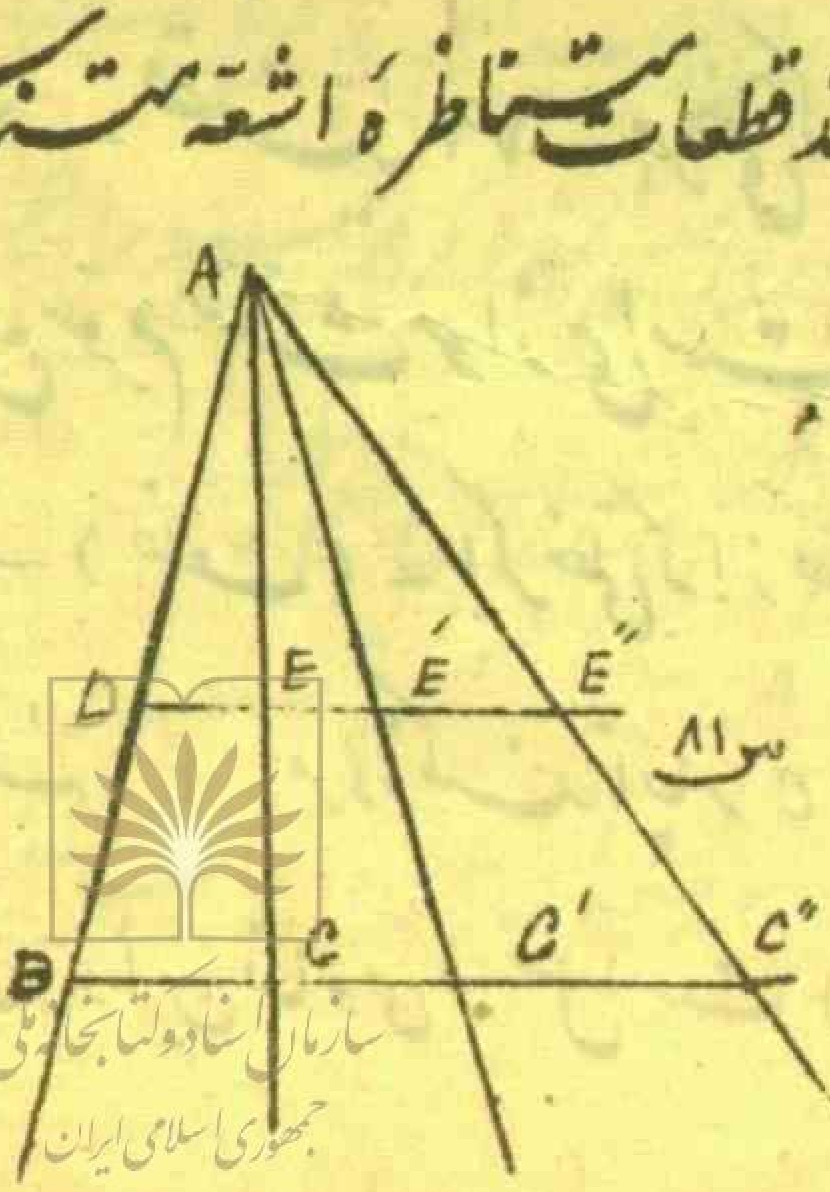
یا بتبدیل وسطین $\frac{AX}{AE} = \frac{XC}{EC}$

و این تساوی محال است زیرا طرف اول بزرگتر (یا کوچکتر) و طرف ثانی کوچکتر (یا بزرگتر) از واحد است پس ممکن نیست خطیکه از نقطهٔ D بموازات BC رسم میشود AC را بر نقطهٔ غیر از E قطع کند ولهذا همان DE موازی با BC خواهد بود

۳۵۲ - فرع - عکس فرع (ن ۳۴۹) صحیح است

۳۵۳ - قضیهٔ ۷۳ - هرگاه خطوط شعاعیه متحد المبدا، را (دستهٔ شعاعی) دو خط متوازی قطع کند قطعات متناظرهٔ اشعه متناسبند

(قضیهٔ اشعه)



زیرا چون خط AC ش ۸۹ حول نقطه A دوران کند اگرچه طول قطعات ش ۸۱ BC و DE تغییر میکند اما چون امتداد شان

ثابت است همواره دو ضلع مثلث ABC متناسب قطع میشود و نسبت $\frac{AE}{AC}$

در هر حال مساوی $\frac{AD}{AB}$ و لهذا ثابت است

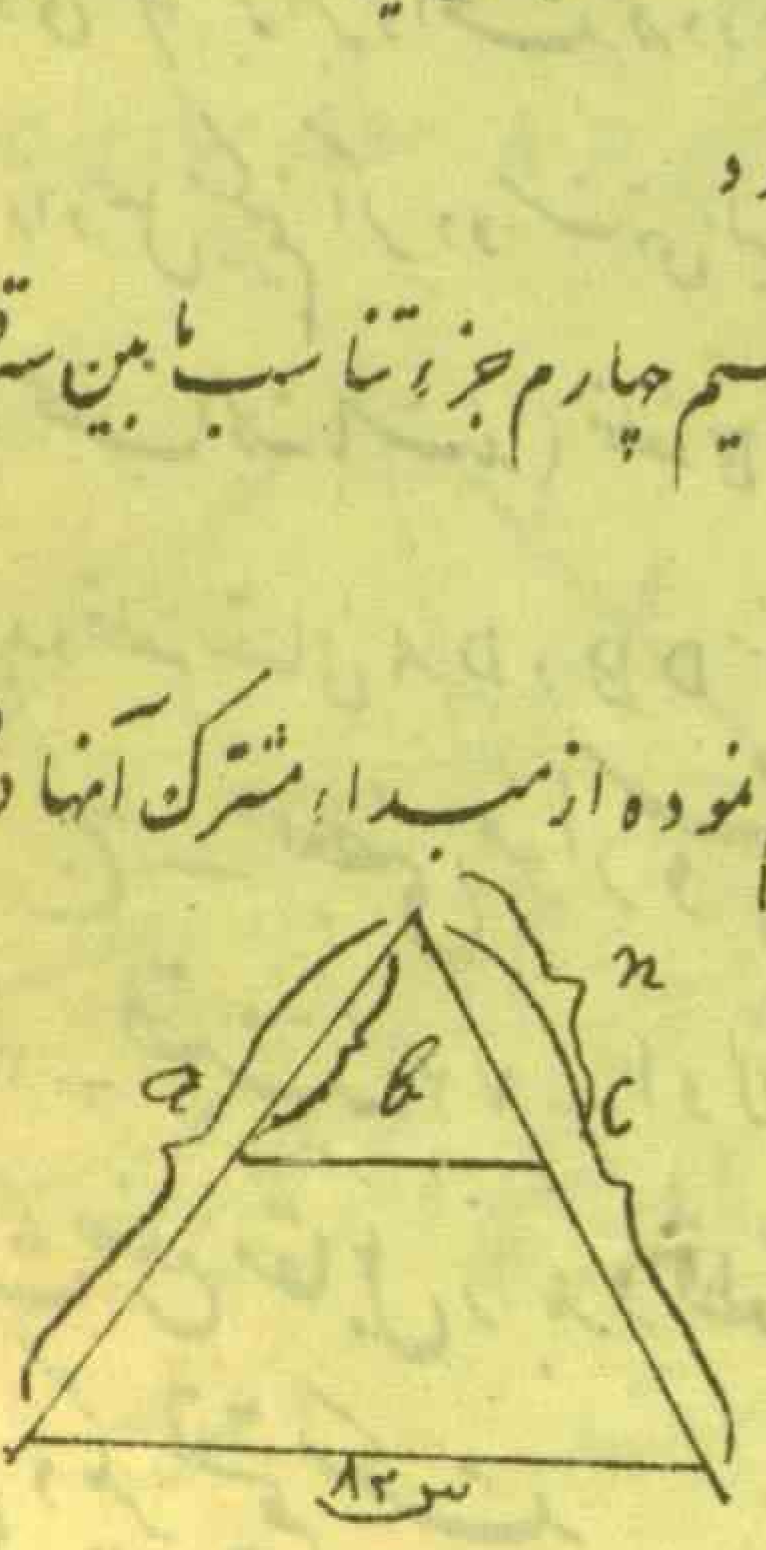
۳۵۴ــ **فرع** ــ قطعات متناظره دو متوازی قاطع نیز متناسبند و برهان

این حکم از فرع (۳۵۰) استنباط میشود

۳۵۵ــ **مسئله اصلی** ــ میخواهیم چهارم جزء تناسب با بین سه قطعه

a و b و c بدست آوریم

حل ــ دو خط شعاعی (ش ۸۷) رسم نموده از مبداء مشترک آنها دو قطعه



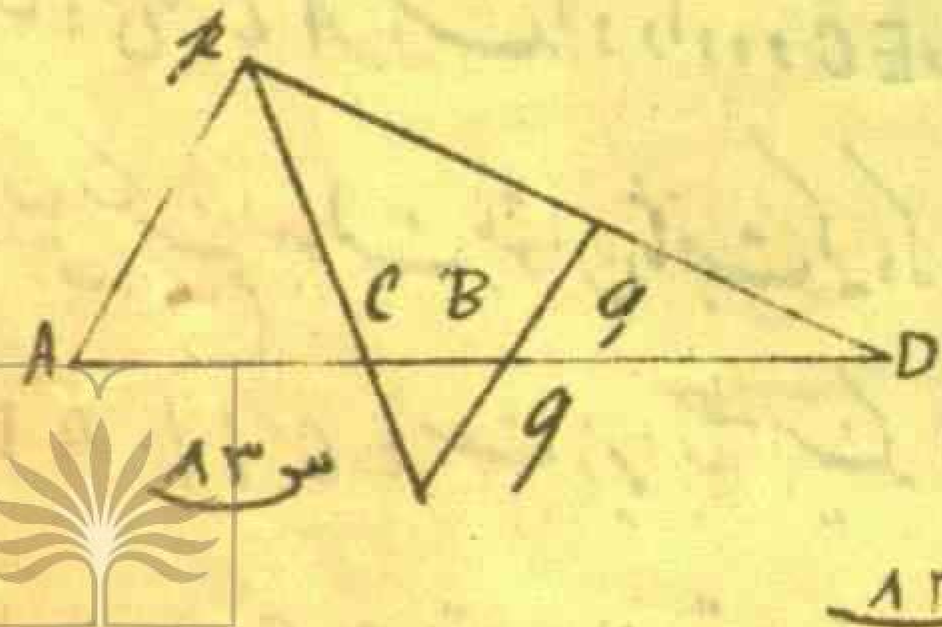
a و b را بر یکی از آن دو

و قطعهٔ c را بر دیگری نقل نموده

منتهی الیه a و c را وصل

نموده از منتهی الیه b خطی بموازات قطعه واصله مرور دهیم قطعه x چهارم

جزء مطلوب است (ق طس)



۳۵۶ــ **مسئله اصلی** ــ میخواهیم قطعه

AB را بر نسبت m و n تقسیم کنیم

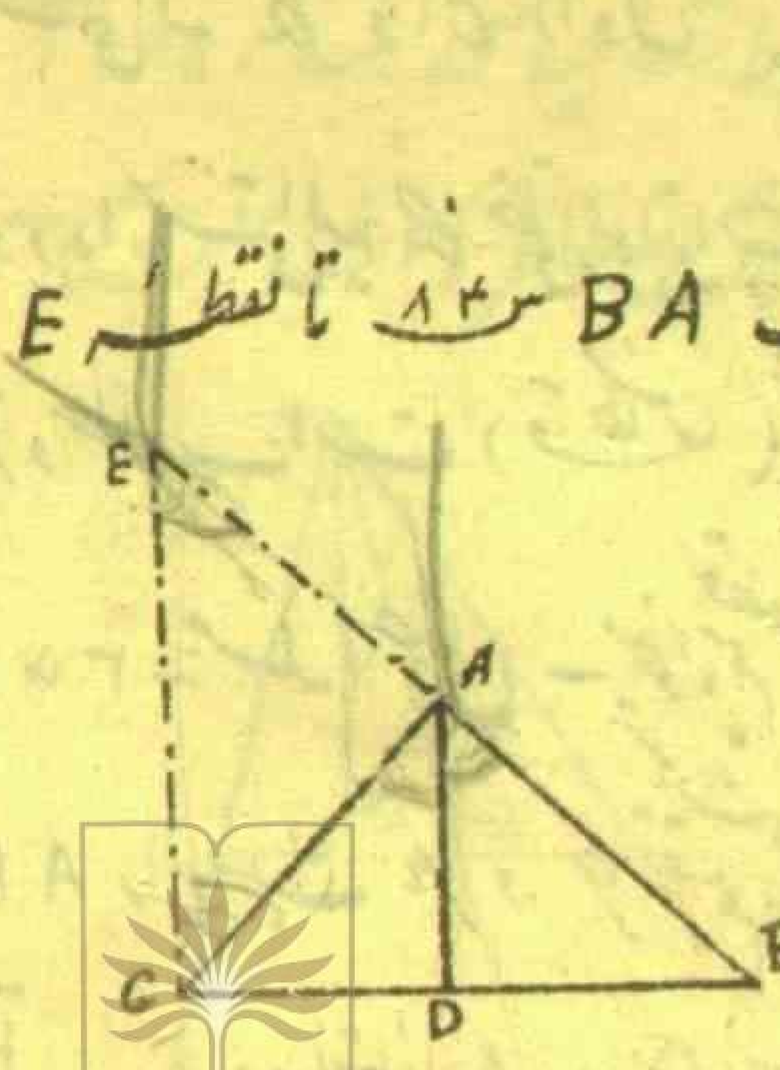
حل ــ بر دو نقطهٔ A و B (ش ۸۳)

دو خط متوازی با امتداد اختیاری مرور میدهیم و بر آنکه بنقطهٔ A گذشته قطعه مساوی با p برابر واحد اختیاری و بر آنکه بنقطهٔ B مرور نموده قطعه مساوی q برابر واحد در دو جهت نقل نموده منتهی الیه دو قطعه p و q را وصل میکنیم اگر دو منتهی الیه در دو طرف AB باشند (p و q مختلف الجهة باشند) قطعهٔ AB بدو جزء اضافی CA و CB والا بدو قطعه نقصانی DA و DB منقسم میگردند فرع نمرهٔ ۳۵۰)

ج ـ بعضی موارد استعمال قضیه طالس

۳۵۷ ـ قضیهٔ ۷۴ ـ اولاً منصف هر زاویهٔ داخلهٔ مثلث ضلع مقابل را بدو قطعهٔ اضافی متناسب با دو ضلع دیگر تقسیم میکند

طریقهٔ برهان ـ ضلع AB را در جهت BA تا نقطهٔ E



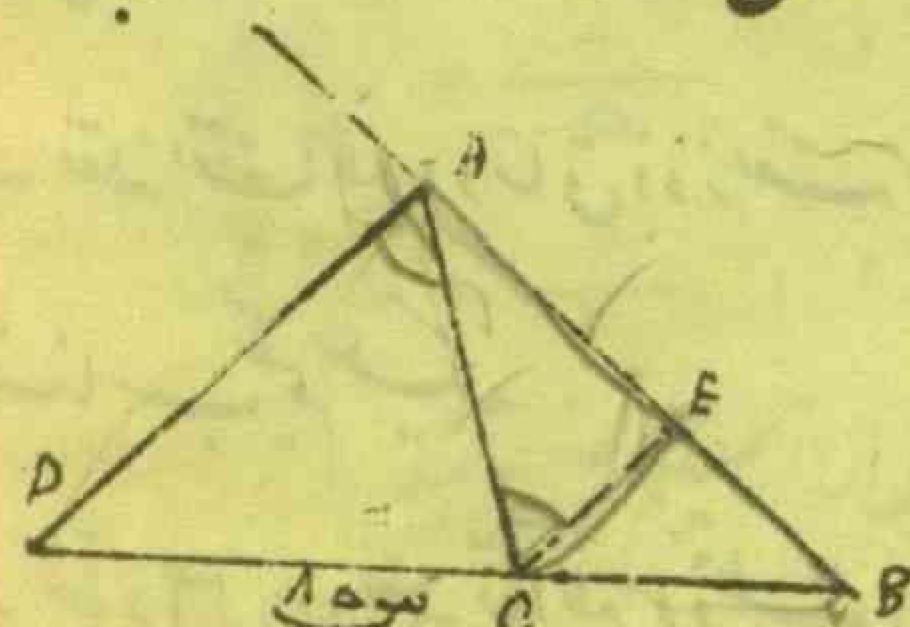
شکل ۸۴

مساوی با AC امتداد داده و EC را وصل میکنیم بسهولت میتوان ثابت کرد که AD // EC است زیرا خطاً اینکه مثلث AEC متساوی الساقین است

$\widehat{E}$ نصف $B\widehat{A}C$ یعنی مساوی با $B\widehat{A}D$ خواهد بود

ثانیاً منصف هر زاویهٔ خارجهٔ مثلث ضلع مقابل را بر دو قطعه نقصانی متناسب با دو ضلع دیگر تقسیم میکند

طریقهٔ برهان — جزو AE را از ضلع AB س ۸۵ مساوی با AC جدا



نموده EC را وصل میکنیم

بقیهٔ برهان مثل سابق است

۳۵۸ — قضیهٔ ۷۵ — هر خط که بر راس مثلث مرور نموده ضلع مقابل را بدو قطعهٔ اضافی (نقصانی) متناسب با دو ضلع دیگر قطع کند منصف الزاویهٔ داخله (خارجه) است (عکس قضیهٔ ۷۴)

طریقه برهان — مانند قضیه ۷۴ عمل میکنیم و بسهولت معلوم میشود که $B\widehat{A}D$ مساوی با $\widehat{E}$ و نصف $B\widehat{A}C$ میباشد س ۸۴ و همچنین اگر تقسیم نقصانی فرض شود س ۸۵

تمرینات

۱ — احکام ذیل را ثابت کنید

۱ - هر خطی که بموازات دو قاعدهٔ ذوزنقه رسم شود دو ضلع دیگر را بر یک نسبت قطع میکند

۲ - خطی که دو ساق ذوزنقه را بر یک نسبت قطع کند با دو قاعدهٔ موازی است

۳ - نقطهٔ تقاطع دو ساق ذوزنقه هر ساق را بدو قطعهٔ نقصانی متناسب تقسیم میکند

۴ - خط واصل بین نقطه تقاطع دو قطر (یا نقطهٔ تقاطع دو ساق) ذوزنقه و وسط یک قاعده و قاعدهٔ دیگر را نصف میکند

۵ - خط واصل بین نقطهٔ تقاطع دو قطر و نقطهٔ تقاطع دو ساق ذوزنقه دو قاعده را نصف میکند

ب - مطلوب است حل مسائل ذیل

مسئلهٔ ۱ - خطی بطول ۱۰ س م $= a$ را اولاً بدو قطعهٔ اضافی ثانیاً بدو قطعهٔ نقصانی بر نسبت $\frac{۴}{۵}$ یا $\frac{۳}{۸}$ یا $\frac{۷}{۴}$ یا $\frac{۱۱}{۶}$ تقسیم نمائید

مسئلهٔ ۲ - خطی بطول ۱۲ س م $= b$ را بر سه جزو متناسب با ۲ و ۳ و ۴ یا ۲ و ۴ و ۵ یا ۳ و ۵ و ۶ تقسیم کنید

مسئلهٔ ۳ - میخواهیم قطعهٔ AB را که طول آن ۵ س م $= c$ است وصل شده بوسطه ا

دو نقطه C و D چنان تقسیم کنیم که دو تناسب ذیل برقرار باشد

$\frac{AC}{CD} = \frac{۳}{۴}$ ، $\frac{CD}{DB} = \frac{۶}{۷}$

یا $\frac{AC}{CB} = \frac{۲}{۷}$ ، $\frac{CD}{CB} = \frac{۱}{۲}$

یا $\frac{AD}{CD} = \frac{۶}{۷}$ ، $\frac{AC}{CB} = \frac{۹}{۵}$

یا $\frac{AD}{DB} = \frac{۸}{۳}$ ، $\frac{AC}{AD} = \frac{۶}{۷}$

مسئله ۴ — معادلات ذیل را بترسیم حل نمائید

۱- $\frac{3}{x} = \frac{4}{5}$ ۲- $\frac{3}{7} = \frac{5}{x}$ ۳- $\frac{5}{9} = \frac{x}{4}$

۴- $\frac{3}{5} = \frac{x}{8}$ ۵- $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{x}$ ۶- $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{x}$

۷- $\frac{a+b}{a+b} = \frac{c}{x}$ ۸- $ax = bc$ ۹- $ax = 3b^2$

مسئله ۵ - مثلثی از $l = a+b$ و $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ و c یا α یا m_a یا h_a یا h_b رسم کنید

طریقه حل — بواسطه ترکیب نسبت از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ حاصل میشود $\frac{a+b}{a} = \frac{p+q}{p}$ یا چون $a+b = l$ معلوم فرض شده $\frac{l}{a} = \frac{p+q}{p}$

پس a چهارم جزو تناسب بین سه مقدار معلوم l و p و $p+q$ خواهد بود همینکه a و b معلوم شد مسئله را برسم مثلثی از a و

b وجزء معلوم دیگر راجع میگردد

مسئلهٔ ۶- مثلثی از $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ و $a - b = l$ و c یا α یا m_a یا h_a یا h_b رسم کنید

مسئلهٔ ۷- مثلثی از $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ و $h_a + h_b = l$ و c یا α رسم کنید

طریقهٔ حل- چون $\frac{h_b}{h_a} = \frac{a}{b}$ معلوم میشود که $\frac{h_b}{h_a} = \frac{p}{q}$ ولذا بترکیب نسبت $\frac{l}{h_a} = \frac{p+q}{q}$ وازینجا h_a و h_b معلوم میشود

مسئلهٔ ۸- مثلثی از $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ و $h_a - h_b = l$ و c یا α رسم کنید (شرط امکان مسئله اینست $p < q$)

مسئلهٔ ۹- مثلثی از a و b و $h_a - h_b = l$ رسم کنید

طریقهٔ حل- از $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$ نتیجه میشود $\frac{a+b}{a} = \frac{l}{h_b}$ پس h_a و h_b معلوم و مسئله حل میشود

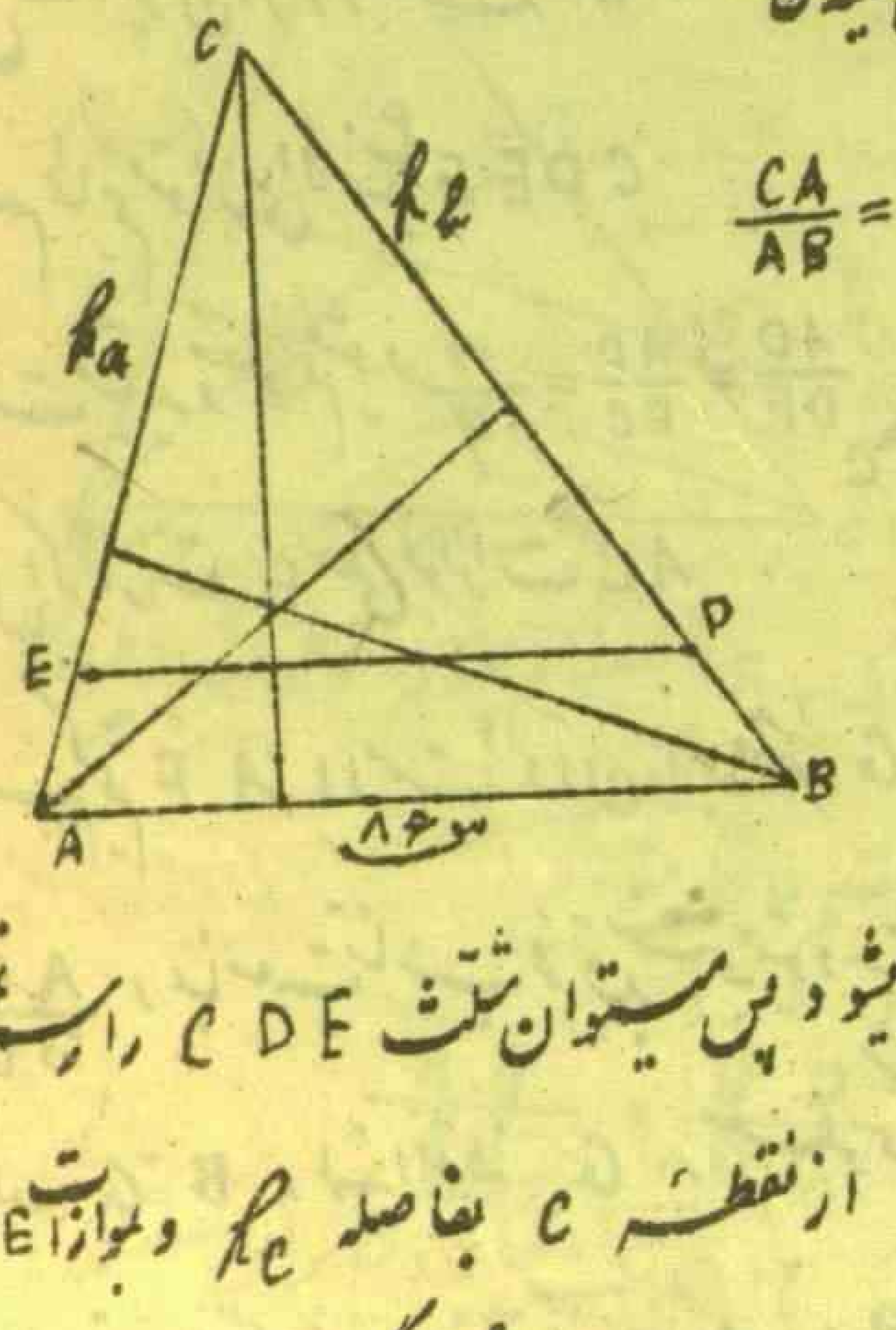
مسئلهٔ ۱۰- مثلثی از a و b و $h_a - h_b = l$ رسم نمائید (شرط امکان اینست $b > a$)

مسئلهٔ ۱۱- مثلثی از h_a و h_b و h_c رسم نمائید

حل- از تساوی $a\, h_a = b\, h_b$ نتیجه میشود $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$ ونیز

میتوان یافت که $\frac{c}{h_b} = \frac{h_a}{h_c}$ حال اگر در مثلث ABC سه ۸۶ ابتدا از نقطه C طول CD را مساوی h_b از CB و طول CE را مساوی با h_a از CA جدا نموده DE را وصل نمائیم بنا بر تناسب

$\frac{a}{h_b} = \frac{h_b}{h_a}$ وعکس قضیه طالس



$\frac{CA}{AB} = \frac{CE}{ED}$ ولهذا DE ∥ AB

یعنی $\frac{b}{c} = \frac{h_a}{ED}$

اما چون $\frac{b}{c} = \frac{h_a}{h_b}$

پس $\frac{h_a}{h_b} = \frac{h_a}{ED}$

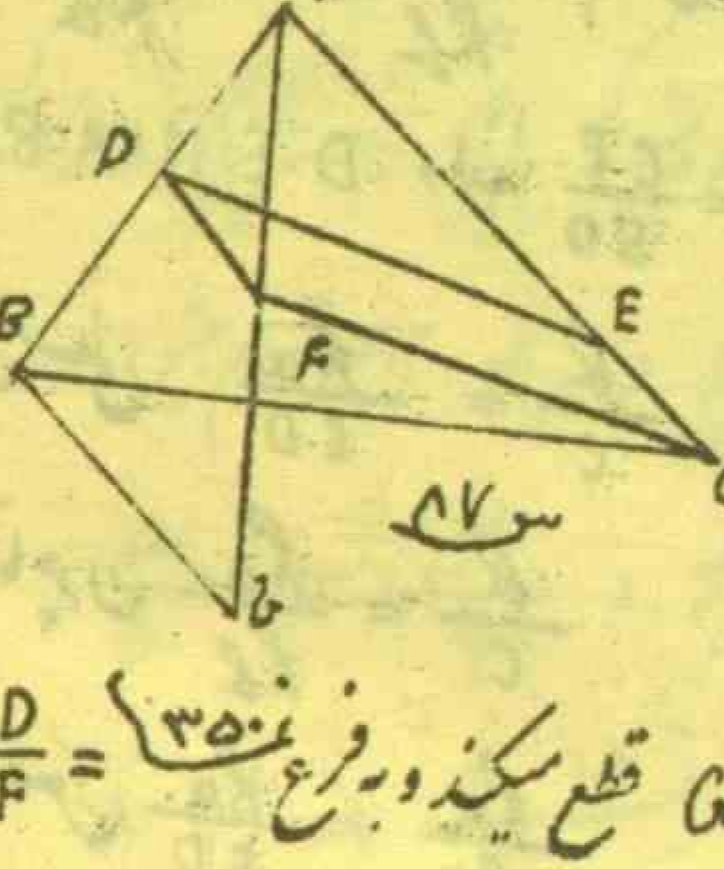
از تناسب اخیر ED معلوم میشود پس میتوان مثلث CDE را رسم نمود وبالاخره چون ضلع AB از نقطه C بفاصله h_c وبموازات DE واقعست بسهولت رسم شده مثلث ABC معلوم میگردد

مسئله ۱۲ — بریکی از دو نقطه تقاطع دو دایره قاطعی چنان مرور دهید که دو وتر حاصل بر نسبت معینی باشند

طریقه حل — چون خط المرکزین را بر نسبت دو وتر تقسیم کنیم نسبت فاصلهٔ دو وتر از دو مرکز بسهولت معلوم شده امتداد قاطع بدست میاید

مسئله ۱۳ - بر دو ضلع AB و AC از مثلث ABC (شکل ۸۷) دو نقطهٔ D و E را بقسمی تعیین کنید که DE بطول معین l و $\frac{AD}{EC}=\frac{p}{q}$ باشد

حل - چون از دو نقطهٔ D و C بترتیب دو موازی با AC و DE رسم نمائیم متوازی الأضلاع CDEF



شکل ۸۷

بدست میآید و معلوم میشود $\frac{AD}{DF}=\frac{AD}{EC}=\frac{p}{q}$

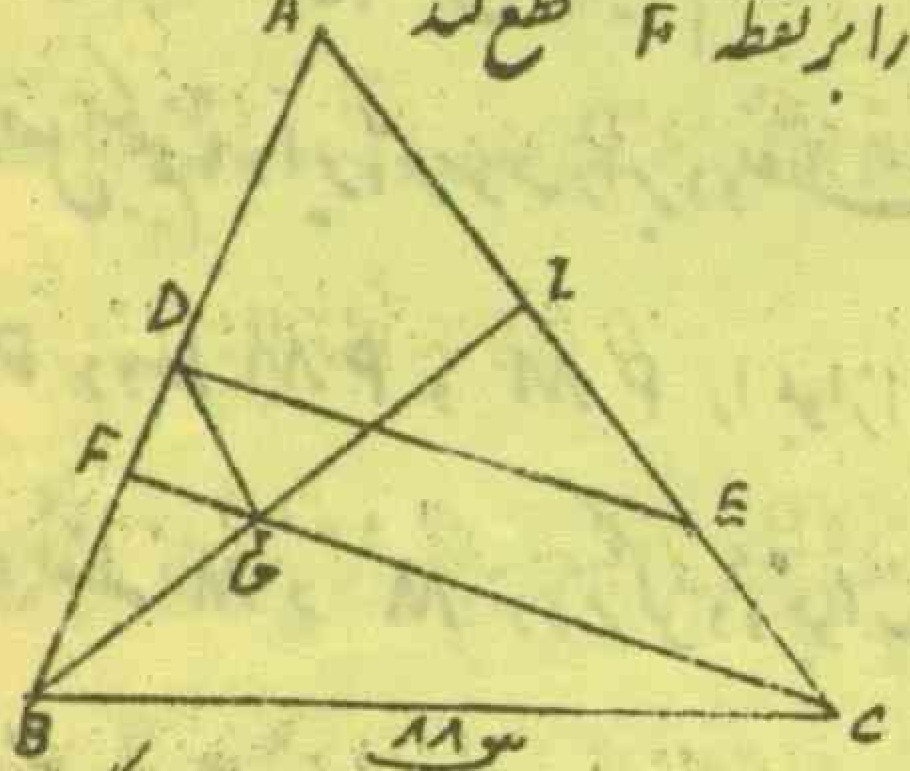
حال اگر از نقطه B خطی بموازات AC رسم کنیم AF یا امتداد آن را بر نقطهٔ G قطع میکند و به فرع (۳۵۰) $\frac{AD}{DF}=\frac{AB}{BG}$ و بمناسبت تناسب فوق نتیجه میشود $\frac{AB}{BG}=\frac{p}{q}$ از این تساوی میتوان قطعه BG و لهذا نقطهٔ G را معلوم کرد

بعد از تعیین نقطهٔ G خط AG را وصل و از مرکز C باشعاع l قوسی رسم میکنیم تا AG را بر نقطه F قطع کند و چون از این نقطه FD را بموازات AC رسم کنیم نقطه D معلوم شده بالاخره از D خط DE را بموازات CF مرور دهیم تا نقطه E معین شود (بحث در حالات مختلفهٔ مسئله و تحقیق شرط امکان آنرا بعهدهٔ متعلمین میگذاریم)

س ۸۸

مسئله ۱۴ـ میخواهیم بر دو ضلع AB و AC از مثلث ABC دو نقطهٔ D و E را چنان تعیین کنیم که $\frac{AD}{AE}=\frac{h}{q}$ و $\frac{DB}{EC}=\frac{h}{s}$ باشد

حل ــ فرض کنیم مسئله حل شده باشد DE را وصل نموده و از نقطهٔ G خطی بموازات آن مرور میدهیم تا AB را بر نقطهٔ F قطع کند



حال چون $\frac{AD}{AE}=\frac{h}{q}$

و $\frac{AD}{AE}=\frac{AF}{AC}$

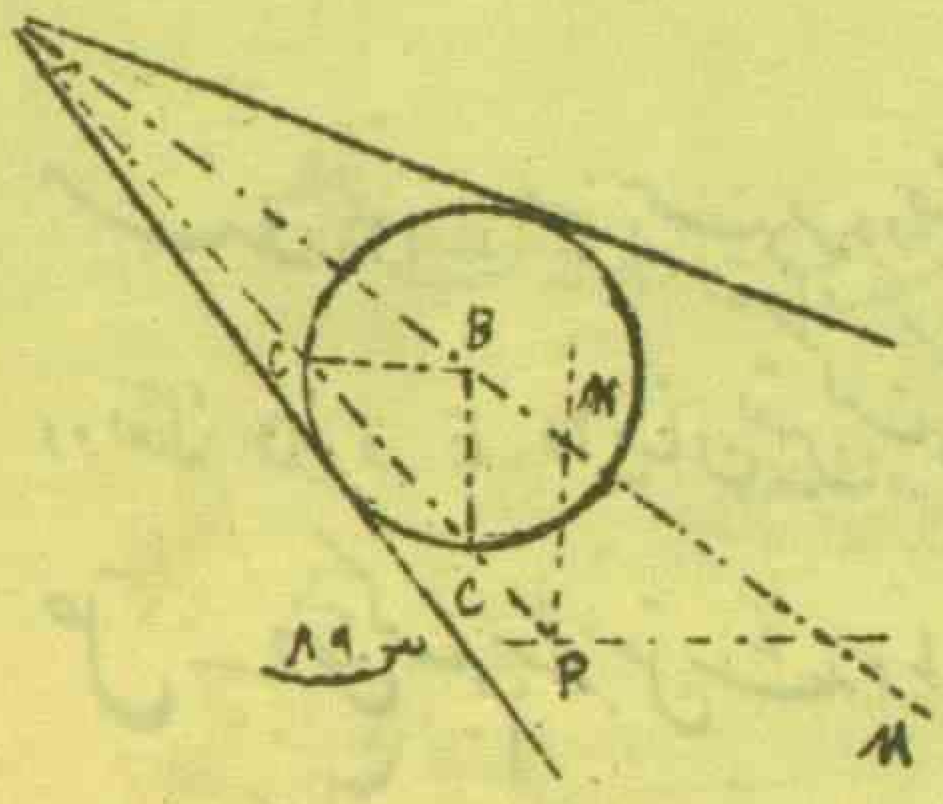
پس $\frac{AE}{AC}=\frac{h}{q}$

بوسیلهٔ تساوی اخیر خط AF ولذا نقطه F معلوم میشود از طرف دیگر چون DG را بموازات AC رسم کنیم ملاحظه میشود که

$$\frac{AB}{AI}=\frac{BD}{DG}=\frac{BD}{CE}=\frac{h}{s}$$

ازاین رابطه AI ولهذا نقطهٔ I بدست میاید و بنابراین نقطهٔ G بواسطهٔ تقاطع CF و BI معلوم میشود و چون ازاین نقطه خطی بموازات AC رسم کنیم نقطهٔ D و پس از آن بواسطهٔ رسم DE بموازات CF نقطهٔ E حاصل میگردد و مسئله حل میشود

مسئله ۱۶ـ بر نقطه مفروضه P در درون زاویه $\hat{A}$ دایره مرور د...



که با دو ضلع زاویه مماس شود س ۸۹

حل - منصف الزاویه AB را رسم نموده از مرکز اختیاری B بر این خط دایره مماس با دو ضلع زاویه رسم و AP را وصل بکنیم تا دایرهٔ مرسومه را بر دو نقطهٔ C و C′ قطع کند حال چون از نقطهٔ P دو خط PM و PM′ را بموازات CB و C′B مرور دهیم دو نقطهٔ M و M′ دو مرکز دو جواب مسئله اند و از اینجا معلوم میشود که این مسئله عموماً دو جواب دارد

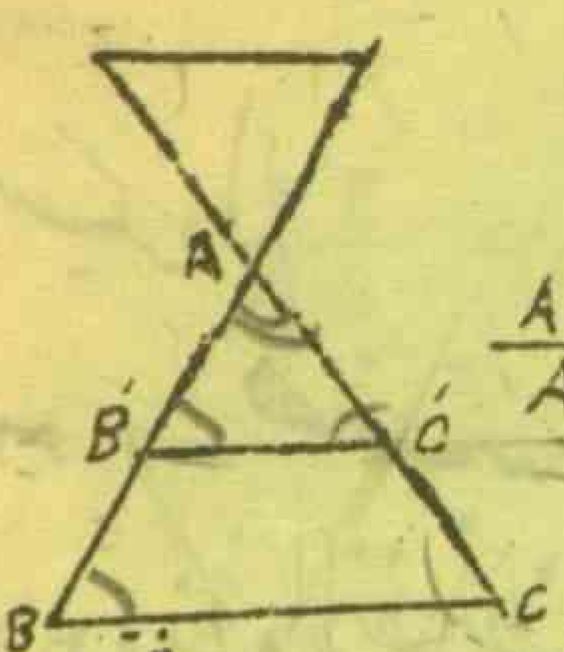
د - حالات تشابه مثلثات و مقایسهٔ سطوح

۳۵۹ - **تعریف** - دو کثیر الاضلاع متشابه (∽) گویند وقتیکه زوایا شان نظیر بنظیر متساوی و اضلاعشان نظیر بنظیر متناسب باشند

۳۶۰ - **قضیهٔ ۷۶** - خطی که بموازات یکضلع مثلث رسم شود با دو ضلع دیگر مثلثی تشکیل میکند مشابه با مثلث اول

ف - س ۹۰ $B'C' \parallel BC$

ح - $\triangle AB'C' \backsim \triangle ABC$



ب ـ بموجب قضیه (فرع ۳۵۰) $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

و از طرف دیگر $\hat{A} = A$ (مشترک یا متقابله به رأس)

و $\hat{B'} = \hat{B}$ و $C = C'$ (متقابله داخل و خارج) پس دو مثلث

ABC و $AB'C'$ که اضلاعشان متناسب و زوایاشان متساوی است

متشابهند

۳۶۱ ـ **مسئله** ـ میخواهیم مثلثی متشابه با مثلث مفروض ABC رسم کنیم

حل ـ برای اینکه دو مثلث متشابه شوند کافی است که چهار

شرط ذیل در آنها صدق کند

۱ ـ $\hat{D} = \hat{A}$
۲ ـ $\hat{E} = \hat{B}$

پس بالضروره $\hat{E} = C$

۳ ـ $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$
۴ ـ $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$

پس بالضروره $\frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$

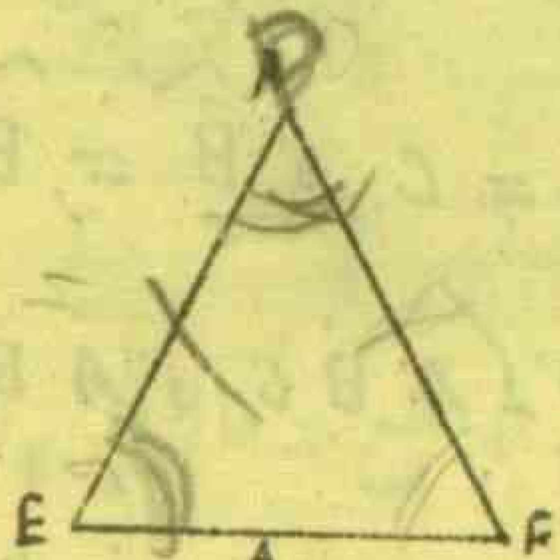
اگر چه فقط دو شرط از این چهار شرط را میتوان بوسیلهٔ ترسیم بعمل آورد لیکن

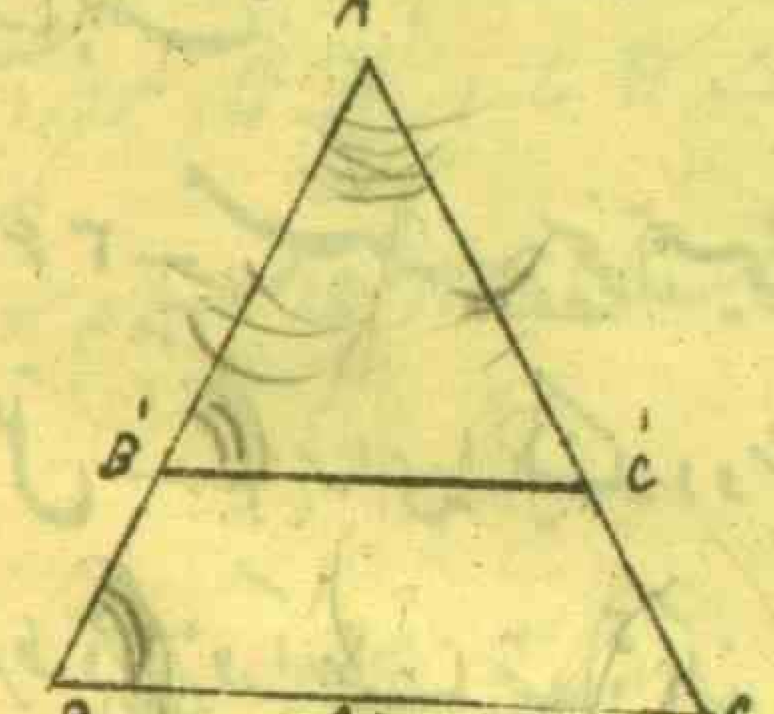
بچهار قضیهٔ ذیل ثابت شده که اجرای همان دو شرط برای تشابه دو مثلث

کفایت میکند و از آنجا چهار حالت برای تشابه نظیر حالات تساوی دو مثلث مستنبط

میگردد

۳۶۲ - **قضیه ۷۷** - (حالت اول) دو مثلث متشابهند هرگاه در دو زاویه نظیر بنظیر متساوی باشند





ف - $\hat{D} = \hat{A}$ و $\hat{E} = \hat{B}$ س ۹۱

ح - $\triangle DEF \sim \triangle ABC$

ب - AB' و AC' را بترتیب مساوی با DE و DF جدا نموده $B'C'$ را وصل میکنیم پس دو مثلث $AB'C'$ و DEF متساویند (ض ز ض)

ولهذا $\hat{E} = \hat{B'}$ امّا بالفرض $\hat{E} = \hat{B}$ پس $\hat{B'} = \hat{B}$ و چون این دو زاویه متقابله داخل و خارجند پس $B'C' \parallel BC$ و بقـ ۷۸ $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$ لیکن $\triangle AB'C' = \triangle DEF$ پس $\triangle DEF \sim ABC$ وهو المطلوب

۳۶۳ - **قضیه ۷۸** - (حالت دوم) دو مثلث متشابهند هرگاه در دو ضلع نظیر بنظیر متناسب و در زاویه بینهما متساوی باشند

ف - س۹۱ $\hat{D} = \hat{A}$ و $\frac{DF}{AC} = \frac{DE}{AB}$

ح -

ب - بفرض اینکه $AB' = DE$ و $AC' = DF$ باشد مثلث

$AB'C'$ با مثلث DEF مساوی میگردد و بعلاوه از فرض نتیجه

میشود $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ ولهذا $B'C' \parallel BC$ و به ق ۷۸ برهان تمام میشود

۳۶۴ - قضیه ۷۹ - (حالت سوم) دو مثلث متشابهند هرگاه

دو ضلع نظیر بنظیر متناسب و در زاویه مقابل بضلع اعظم متساوی باشند

ف - س۹۱ $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$ و $\hat{E} = \hat{B}$ و $AC > AB$

ح - $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

مانند سابق AB' و AC' را مساوی با DE و DF

جدا نموده تساوی دو مثلث $AB'C'$ و DEF و تشابه

ABC و $AB'C'$ را ثابت مینمائیم

۳۶۵ - قضیه - (حالت چهارم) دو مثلث متشابهند

هرگاه سه ضلع نظیر بنظیر متناسب باشند

ف - س۹۱ $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$ و $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$

ح - $\triangle DEF \sim \triangle ABC$

(اقامهٔ برهان بر عهدهٔ متعلم است)

۳۶۶ - تنبیه - عموماً ممکن است خطوط متناسبه را اضلاع مثلثات متشابه قرار داد

۳۶۷ - قضیه ۸۲ - نسبت سطح دو مستطیل مثل حاصل ضرب دو بعد آنهاست و اگر در یک بعد مشترک باشند نسبتشان مثل بعد دیگر است

ب - چون به ق ۶۲ مساحت مستطیل حاصل ضرب دو بعد آنست نسبت دو مستطیل که قاعده شان a و a' و ارتفاعشان h و h' و سطحشان s و s' باشد چنین میشود

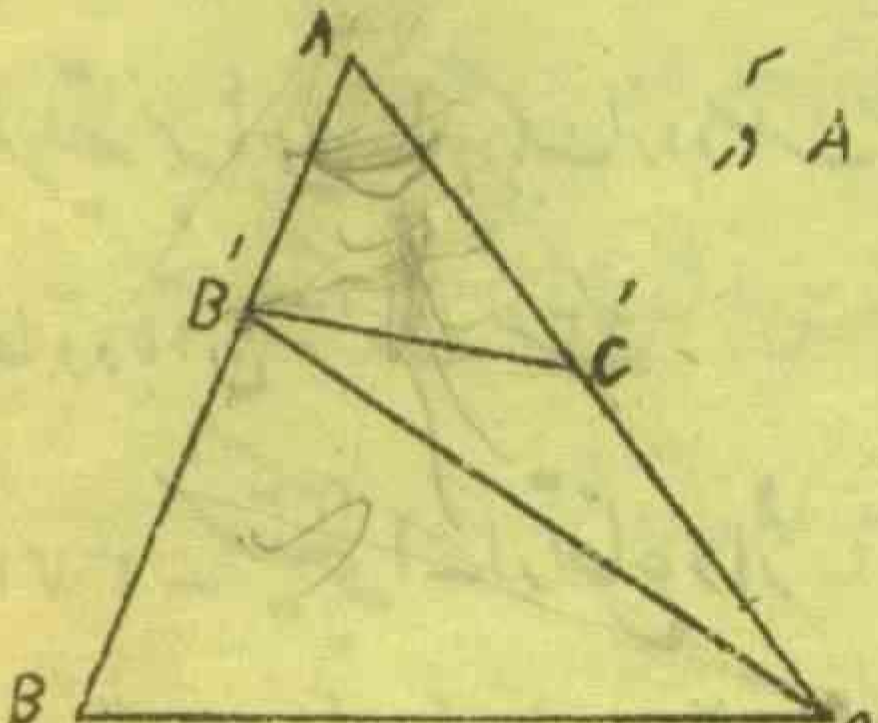
$$\frac{s}{s'} = \frac{a\,h}{a'\,h'}$$

حال اگر فرض کنیم مثلاً $h = h'$ عامل h در صورت و مخرج طرف ثانی مشترک شده تناسب فوق بعد از اختصار چنین میشود $\frac{s}{s'} = \frac{a}{a'}$

۳۶۸ - نتیجه - نسبت دو مثلث یا دو متوازی الاضلاع که در قاعده (یا ارتفاع) مشترک باشند مثل دو ارتفاع (یا دو قاعده) است

۳۶۹ ـ قضیهٔ ۸۲ ـ نسبت دو مثلث که در یک زاویه مساوی باشند مثل حاصل ضرب دو ضلعی است که حاوی آن زاویه اند

ب ـ دو مثلث را بقسمی قرار میدهیم که در زاویهٔ متساویه مشترک شوند س ۹۲ و نقطهٔ B' را بنقطه C وصل میکنیم دو مثلث ABC و $AB'C$ در ارتفاع h_c و دو مثلث $AB'C$ و $AB'C'$ در ارتفاع $h_{B'}$ مشترکند پس (ع ۳۶۰)



س ۹۲

$$\frac{ABC}{AB'C} = \frac{AB}{AB'}$$

و

$$\frac{AB'C}{AB'C'} = \frac{AC}{AC'}$$

از ضرب این دو تساوی و حذف عامل مشترک $AB'C$ از صورت و مخرج طرف اول حاصل میشود

$$\frac{ABC}{AB'C'} = \frac{AB \times AC}{AB' \times AC'}$$

وهو المطلوب

۳۷۰ ـ قضیهٔ ۸۳ ـ دو مثلث متشابه بر نسبت مربع اضلاع متناظره اند

ب ـ اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه باشند دو زاویه متناظره A و A' متساوی میشوند و به ق ۸۰ این تناسب حاصل است

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB \times AC}{A'B' \times A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AC}{A'C'}$$

لیکن بمتشابه دو مثلث

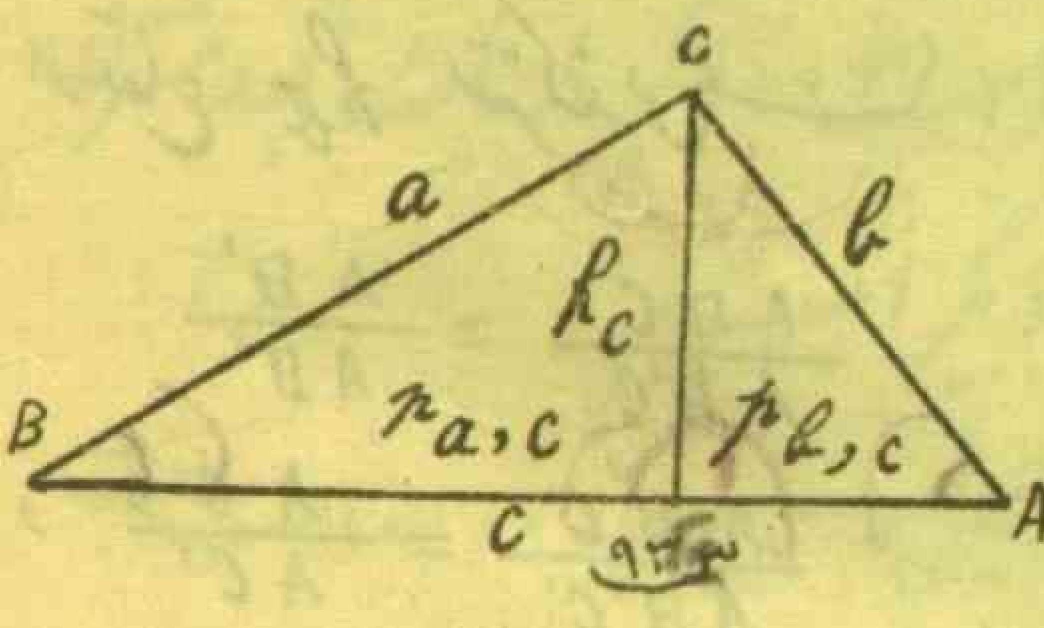
$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B}$$

پس $\frac{ABC}{AB'C'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AB}{AB} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$

بعضی احکام که بتشابه مثلثات راجع میشود

۳۷۱ - قضیهٔ ۸۴ - هر مثلث قائم الزاویه بواسطهٔ ارتفاع وارد بر وتر بدو مثلث متشابه که با مثلث کل نیز متشابهند تجزیه میشود

طریقه برهان - هریک از دو مثلث جزء در زاویهٔ قائمه با مثلث کل متساوی و در زاویهٔ حادّه با آن مشترکند س ۹۳



۳۷۲ - نتیجهٔ ۱ - ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی است بین دو قطعهٔ وتر (از تشابه دو مثلث جزء این تناسب حاصلست $\frac{p_{a,c}}{h_c} = \frac{h_c}{p_{b,c}}$)

۳۷۳ - نتیجهٔ ۲ - در مثلث قائم الزاویه هر ضلع از زاویهٔ قائمه واسطهٔ هندسی است مابین وتر و تصویر همان ضلع بر وتر (از تشابه مثلث جزء با مثلث کل این تناسب حاصل است س ۹۳ $\frac{c}{a} = \frac{a}{p_{a,c}}$)

۳۷۴ - مسئلهٔ اصلی - میخواهیم مابین دو قطعهٔ a و b واسطهٔ هندسی تعیین کنیم

حل - نیم دایرهٔ بقطر $a + b$ رسم نموده از نقطهٔ مشترک بین a و b عمودی بر قطر اخراج میکنیم تا دایره را تلاقی نماید طول این عمود واسطهٔ هندسی مطلوب است

(نتیجهٔ ۳۷۲)

۳۷۵ - حل ۲ - نیم دایرهٔ بقطر a رسم نموده b را از a تفریق کرده از منتهای b عمودی بر قطر اخراج میکنیم و نقطهٔ تلاقی آنرا با دایره بمنتهای مشترک a و b وصل میکنیم تا واسطهٔ هندسی مطلوب بدست آید (نتیجهٔ ۳۷۲)

۳۷۶ - مسئلهٔ اصلی - میخواهیم مابین دو قطعه a و b سوم جزء متناسب را تعیین کنیم (یعنی b واسطهٔ هندسی باشد مابین a و جزء مطلوب)

طریقهٔ حل - علاوه بر دو حلی که از دو نتیجهٔ ۳۷۲ و نتیجهٔ ۳۷۳ استنباط میشود ممکنست قضیهٔ اشعه را برای حل مسئله بکار برد

۳۷۷ - قضیهٔ ۸۵ - در مثلثات متشابه جمیع خطوط متناظره از قبیل ارتفاعات و میانه‌ها و اشعهٔ دوایر محاطیه و امثال آنها متناسبند بر نسبت اضلاع

طریقهٔ برهان - در هر حال باید تشابه دو مثلث را بیکی از حالات تشابه ثابت کرد

۳۷۸ - نتیجه - مثلثات متشابه بر نسبت مربعات خطوط متناظرهٔ خود میباشند

۳۷۹ - قضیهٔ ۸۶ - همواره ممکنست دو کثیر الاضلاع متشابه را بواسطهٔ خطوط متناظره مثلاً اقطار آنها بچندین مثلث متشابه تجزیه نمود

طریقهٔ برهان - عموماً چنین مثلثات در دو ضلع متناسب در زاویهٔ بینهما متساویند

۳۸۰ - قضیهٔ ۸۷ - بالعکس هر دو کثیر الاضلاع که از یکعده مثلثات متشابه متشابه الوضع مرکب باشند متشابهند

طریقهٔ برهان - از تساوی زوایای مثلثات بواسطهٔ جمع تساوی زوایای دو کثیر الاضلاع و از تناسب اضلاع مثلثات تناسب اضلاع دو کثیر الاضلاع نتیجه میشود

۳۸۱ - قضیهٔ ۸۸ - در دو کثیر الاضلاع متشابه دو محیط بر نسبت دو ضلع یا دو خط متناظره و دو سطح بر نسبت مربعات همان خطوط است

طریقهٔ برهان - چون در نسب متساویه نسبت مجموع مقدمات بمجموع توالی مثل یکی از نسبتهای مفروضه است اثبات قضیه بترکیب نسبت راجع میشود

تمرینات

ا - مطلوبست اثبات احکام ذیل

۱ - هرگاه اضلاع دو مثلث متوازی یا عمود بر یکدیگر باشند آن دو مثلث متشابه میشوند

۲ - هرگاه اضلاع متناظره دو مثلث یا دو کثیر الاضلاع متشابه متوازی باشند خطوط واصله ما بین رؤس متناظره بر یک نقطه تقاطع میکنند

۳ - در دایره هر وتر واسطهٔ هندسی است ما بین قطر و تصویر همان وتر بر قطری که بیک طرف آن مرور کند

۴ - در دایره مربع هر وتر چهار برابر سطح دو قطعه قطریست که بر آن وتر عمود باشد

۵ - شعاع دایره واسطه هندسی است ما بین دو قطعه مماسی که بواسطهٔ دو مماس متوازی محدود شده باشد (مبداء دو قطعه مماس نقطهٔ تماس است)

ب - مسائل ذیل را حل نمائید

مسئله ۱ - میخواهیم مثلثی رسم کنیم که وسعتش نسبت به مثلث مفروض $\frac{m}{n}$ و معلومات ذیل از آن مثلث در دست باشد

اولاً – a و ρ (چون وسعت مثلث معلوم است بوسیلهٔ a ارتفاع h_a را معلوم میکنیم و بوسیلهٔ ρ نصف محیط p و از آن رو $p-a$ را حاصل مینمائیم و پس از آن چون دو مماس بر دائرهٔ شعاع ρ بطول $p-a$ رسم کنیم زاویهٔ بین آنها α خواهد بود)

ثانیاً – a و ρ_a ثانیاً a و ρ_b رابعاً h_b و ρ_c خامساً ρ و ...

مسئله ۲ – مثلثی از معلومات ذیل رسم کنید a و h_a $\frac{b}{h_b}=\frac{m}{n}$

یا c یا m_a یا α یا β یا γ

طریقهٔ حل – چون در مثلث ABC عمود CD را از نقطهٔ C بر BC و عمود AD را از نقطهٔ A بر AC اخراج کنیم تشابه دو مثلث این تناسب حاصل است

$$\frac{CD}{a}=\frac{b}{h_b}=\frac{m}{n}$$

و چون m و n و a معلومند CD معلوم میشود بقیهٔ حل مسئله اشکالی ندارد

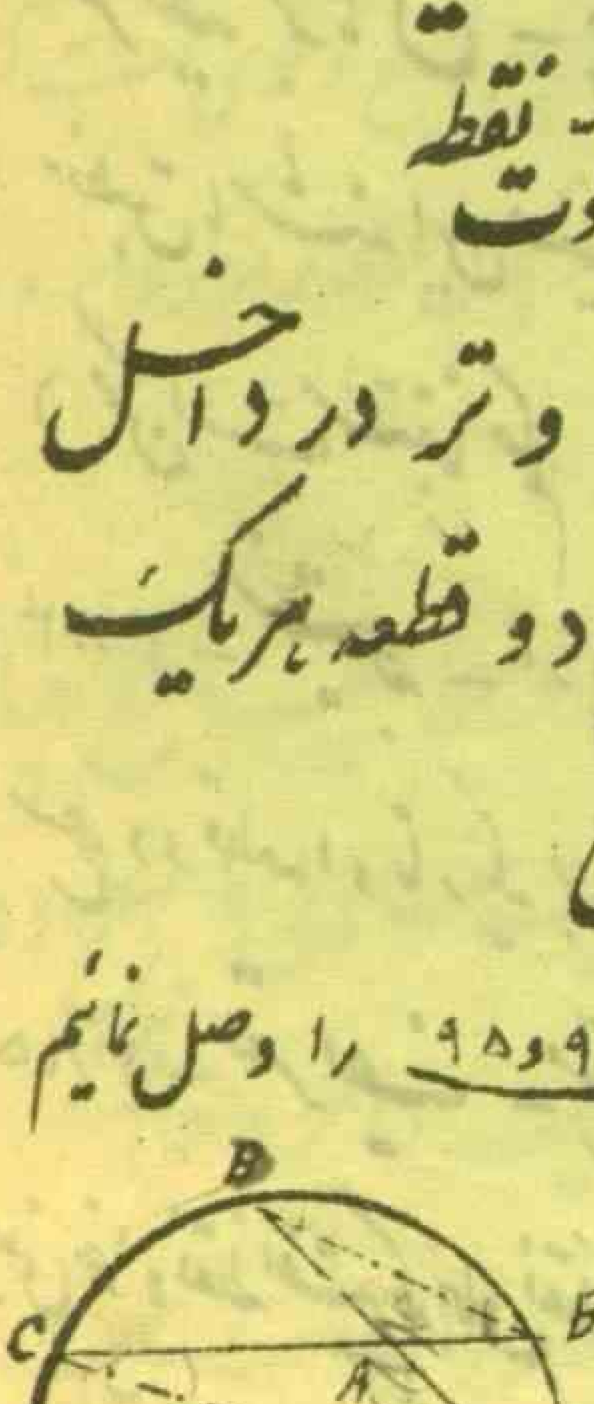
فصل سوم

استعمال تشابه اشکال در دایره

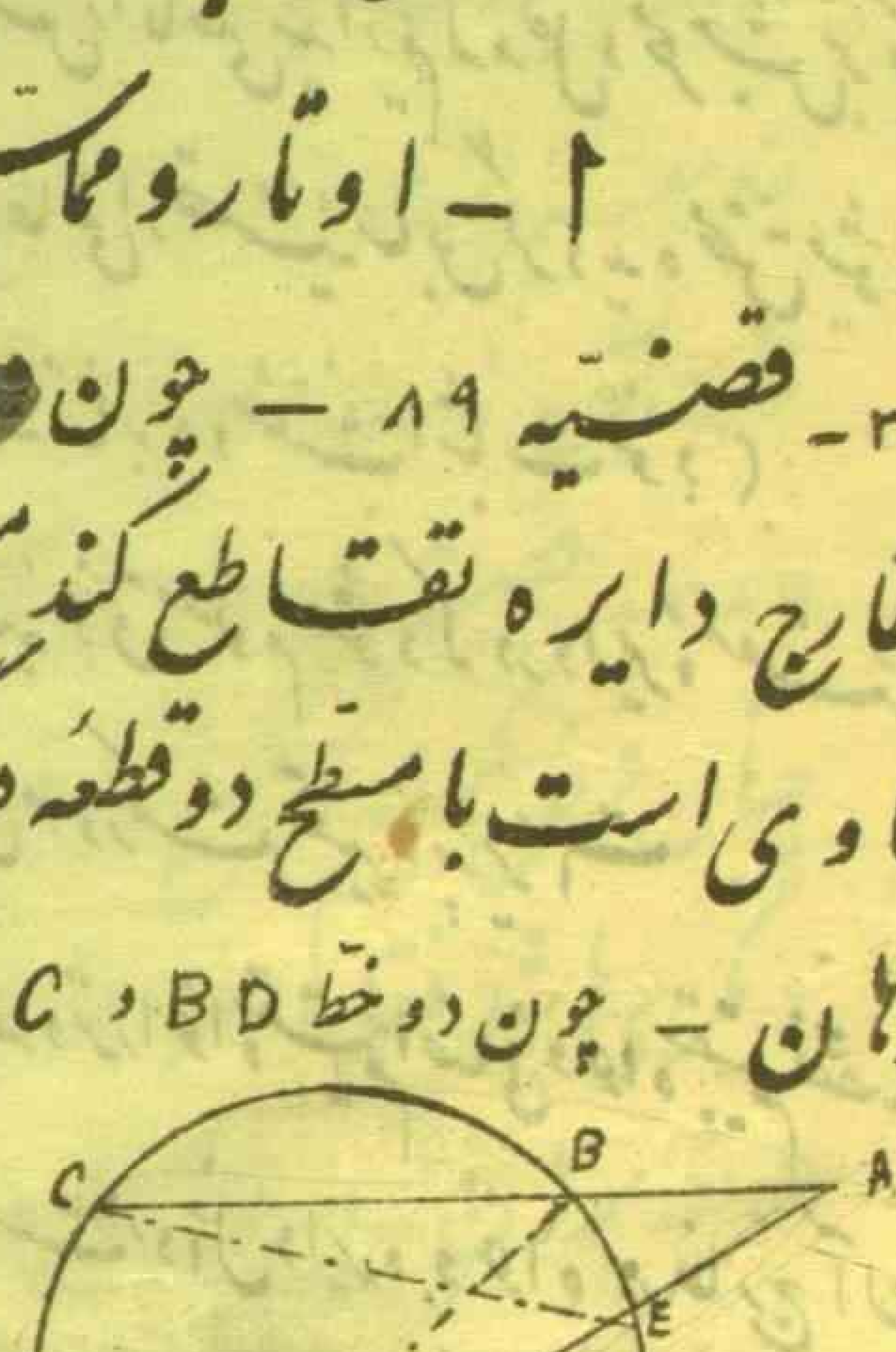
۱ - اوتار و مماس - قوت نقطه

۳۸۱ - قضیه ۸۹ - چون دو وتر در داخل یا خارج دایره تقاطع کند مسطح دو قطعه هر یک مساوی است با مسطح دو قطعه دیگری

برهان - چون دو خط BD و EC (ش ۹۴ و ۹۵) را وصل نمائیم



ش ۹۵



ش ۹۴

از تشابه دو مثلث AEC و ADB که در دو زاویه نظیر بنظیر متساویند ابتدا تناسب حاصلست $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$ که از ضرب طرفین آن در $AE \times AC$ نتیجه میشود $AB \times AC = AD \times AE$ وهو المطلوب

۳۸۲ - قضیه ۹۰ - هرگاه از نقطه مفروضه مماس

بر دایرهٔ مفروضه رسم کنیم مماس واسطهٔ هندسی است مابین تمام قاطع وقطعهٔ خارجی آن

طریقهٔ برهان - چون مماس را قاطعی پنداریم که مدخل ومخرجش بر یکدیگر منطبق باشند این قضیه حالت خاصی از قضیهٔ سابق گردیده محقق میشود (ممکن است مستقیماً حکم را بواسطهٔ تشابه دو مثلث اثبات نمود)

۳۸۴ - **نتیجه** - از دو قضیهٔ فوق معلوم میشود که در دایرهٔ مفروضه مسطح دو قطعه او تاریکه بر نقطهٔ ثابتی مرور کنند تغییر ناپذیر است.

۳۸۵ - **تعریف** - مسطح دو قطعه وتر را خواه بتقسیم اضافی وخواه بتقسیم نقصانی یعنی خواه نقطهٔ تقسیم که همان نقطهٔ تقاطع است در داخل دایره وخواه در خارج آن باشد **قوت** نقطهٔ تقاطع نسبت بدایرهٔ مفروضه گویند

۳۸۶ - از تعریف فوق ونتیجهٔ نمرهٔ ۳۸۴ معلوم میشود که هر نقطه نسبت بدایرهٔ مفروضه قوت معینی دارد که تابع حکم ذیل است

فرع - چون فاصلهٔ نقطهٔ مفروضه را از مرکز دایره d وشعاع دایره را r فرض کنیم قوت نقطه بعبارت $r^2 - d^2$ نموده میشود پس اگر نقطهٔ مفروضه در خارج دایره باشد قوت آن مثبت است واگر نقطه بر محیط فرض

شود قوت آن صفر است و اگر در درون دایره واقع شود قوت آن منفی است

در صورت اول قوت نقطه مربع مماسی است که از نقطهٔ مفروضه بر دایره رسم

شود و در صورت اخیر قدر مطلق قوت ربع مربع وتری است که بر قطر نظیر

نقطهٔ مفروضه عمود باشد و واضح است که چون نقطه بر مرکز دایره واقع شود

قوت آن - ر۲ خواهد بود

۳۸۷ - **قضیهٔ ۹۱** - هرگاه بر دو خط متقاطع چهار نقطه چنان فرض کنیم که مسطح دو قطعه هر یک معادل با مسطح دو قطعهٔ دیگری باشد نقاط مفروضه بر محیط یک دایره واقعند

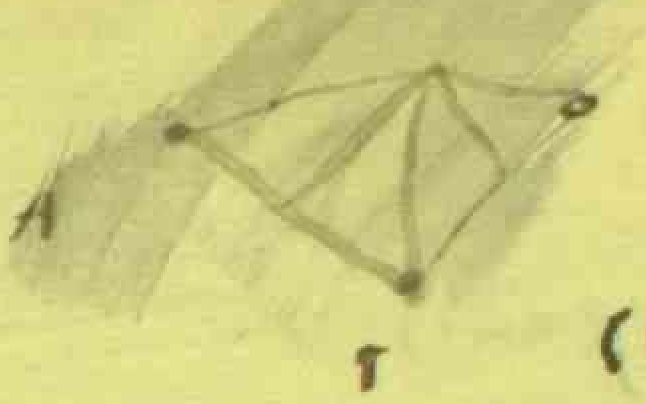
طریقهٔ برهان - این قضیه که عکس ق ۹۰ است ببرهان خلف ثابت میشود

قضیهٔ ۹۲ - عکس قضیهٔ ۹۱ نیز صحیح است (اثبات ببرهان خلف بر متعلم است)

ب - محور اصلی دو دایره

۳۸۸ - **تعریف** - مکان هندسی نقاطی که نسبت بدو دایرهٔ مفروضه متحد القوه باشند به محور اصلی آن دو دایره موسوم است

۳۸۹ - **قضیهٔ ۹۳** - محور اصلی دو دایره خطی است عمود بر خط المرکزین



برهان - فرض میکنیم A ش ۹۶ نقطه از محور اصلی دو دایره (r و M) و (r' و M') باشد چون بالفرض این نقطه نسبت بدو دایره متحد القوه است این تساوی حاصل میگردد

$$AM^2 - r^2 = AM'^2 - r'^2$$

لیکن چون AP را بر MM' عمود کنیم به ق ۶۸

$$AM^2 = AP^2 + PM^2$$

و $AM'^2 = AP^2 + PM'^2$

پس $AP^2 + PM^2 - r^2 = AP^2 + PM'^2 - r'^2$

یا بعد از نقل و اختصار $PM^2 - PM'^2 = r^2 - r'^2$ (۱)

ولی $PM + PM' = MM' = a$ (۲)

و چون رابطه (۱) را بر رابطه (۲) تقسیم کنیم معلوم میشود که

$$PM - PM' = \frac{r^2 - r'^2}{a} \quad (۳)$$

حال از جمع دو رابطه (۲) و (۳) بعد از تجنیس و تقسیم طرفین بر (۲) نتیجه میشود

$$PM = \frac{r^2 - r'^2 + a^2}{2a}$$

از این رابطه آشکار است که نقطه P بر خط المرکزین محل ثابتی دارد زیرا فاصلهٔ آن

از نقطه M یعنی کسر $\frac{a^2+R^2-R'^2}{2a}$ مقداریست ثابت پس جمیع نقاط متحد القوه

مانند A بر عمودی واقعند که از نقطهٔ معین P بر خط المرکزین اخراج شود و بعبارهٔ

اخری این عمود مکان هندسی نقاط مزبور و بنابراین محور اصلی است

۳۹۰ – نتیجهٔ ۱ – محور اصلی مماسهای مشترک را نصف میکند

نتیجهٔ ۲ – در دو دایره مماس محور اصلی مماس مشترکی است

که بر نقطهٔ تماس میگذرد

نتیجهٔ ۳ – در دو دایرهٔ متقاطع وتر مشترک محور اصلی است

۳۹۱ – قضیهٔ ۹۴ – محور اصلی سه دایره بر یک نقطه تقاطع

میکنند که بمرکز اصلی سه دایره موسوم است

برهان – فرض میکنیم محور اصلی دو دایره (R و M) و (R' و M') با محور

اصلی دو دایرهٔ (R' و M') و (R'' و M'') بر نقطه O تقاطع کند این نقطه

نسبت بهر سه دایره متحد القوه خواهد بود و بنابراین بر محور اصلی دو دایره

(R و M) و (R'' و M'') واقع میشود

۳۹۲ – نتیجهٔ ۱ – سه وتر مشترک سه دایرهٔ متقاطعه بر یک نقطه تقاطع میکنند

نتیجه ۲ — در سه دایرهٔ متماس سه مماس مشترکی که بر نقاط تماس میگذرند متقاربند

نتیجه ۳ — مرکز اصلی سه دایره که مرکزشان بر یک استقامت است بفاصله بینهایت است (محورهای اصلی متوازیند)

تمرینات

مسئله ۱ — میخواهیم از مرکز B منتهای قطعه AB دایره رسم کنیم که قوت نقطه A نسبت بدان مقدار معلوم l^2 باشد

طریقهٔ حل — از رابطهٔ $AB^2 - r^2 = l^2$ معلوم میشود که r ضلع مثلثی است قائم الزاویه که وترش l وضلع دیگرش AB باشد

مسئله ۲ — میخواهیم بر دو نقطهٔ مفروضه A و B دایرهٔ مرور دهیم که با خط مفروض CD مماس شود

طریقهٔ حل — امتداد AB خط CD را بنقطهٔ مانند C قطع میکند که قوت آن نسبت بدایرهٔ مطلوبه $CA \times CB$ معلوم است پس اگر D نقطهٔ تماس باشد CD واسطهٔ هندسی مابین CA و CB خواهد بود (بحث مسئله و تحقیق حالتیکه $AB \parallel CD$ باشد بر متعلم است)

مسئله ۳ - میخواهیم محور اصلی دو دایرهٔ غیر متقاطع را رسم کنیم

حل - دایره اختیاری چنان مرور میدهیم که دو دایرهٔ مفروضه را قطع کند و از نقطهٔ تقاطع دو وتر مشترک که مرکز اصلی است عمودی بر خط المرکزین فرود میاوریم

مسئله ۴ - میخواهیم بر دو نقطه A و B دایره مرور دهیم که با دایرهٔ مفروضه مماس گردد

طریقه حل - بر دو نقطه A و B دایرهٔ مرور میدهیم که دایرهٔ مفروضه را قطع کند دو وتر مشترک AB و CD بر مرکز اصلی این دو دایرهٔ (دایرهٔ مطلوبه) میگذرند پس چون از نقطهٔ تقاطع آنها مماسی بر دایرهٔ مفروضه رسم کنیم نقطهٔ تماس دو دایره بر محیط دایرهٔ مفروضه معلوم میشود و جواب مسئله دایره ایست که بر آن نقطه و دو نقطهٔ A و B مرور دهیم (عموماً دو جواب)

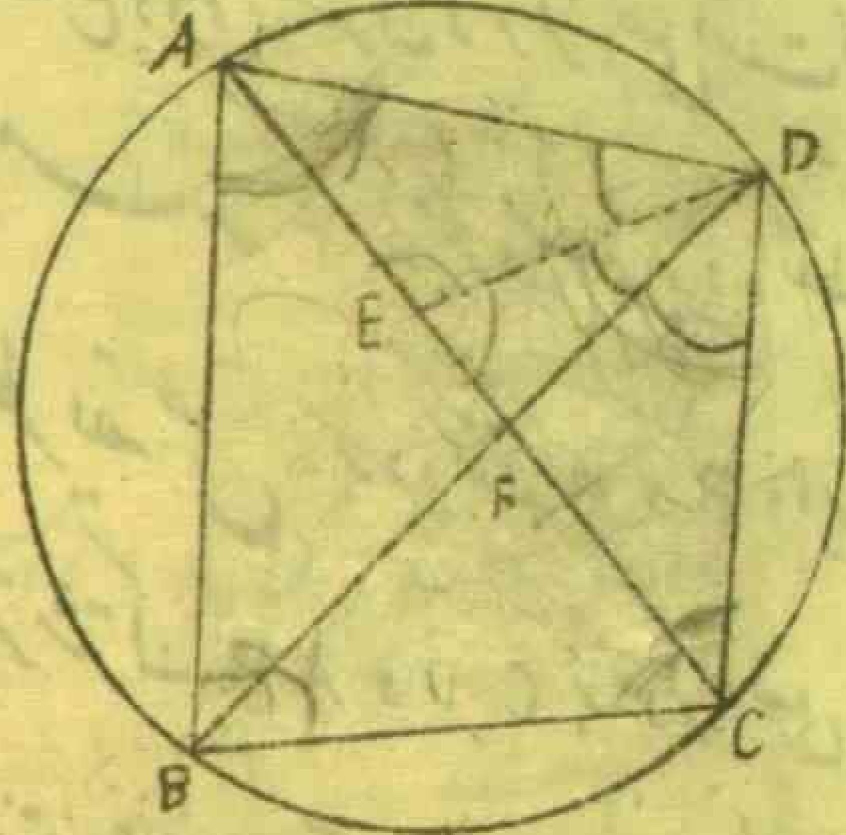
ج - قضیهٔ بطلمیوس و نتایج آن

۳۹۳ - قضیهٔ ۹۵ - در هر ذو اربعه اضلاع محاطی مسطح دو قطر معادل است با مجموع دو مسطح هر دو ضلع مقابل (قضیهٔ بطلمیوس)

برهان - فرض میکنیم ABCD ش ۹۷ ذو اربعه اضلاع محاطی مفروض باشد چون دو قطر را وصل نموده و زاویهٔ ADE را مساوی با زاویهٔ BDC

جدا کنیم چون $\widehat{CAD}=\widehat{CBD}$ دو مثلث ADE و BDC متشابهند

و همچنین دو مثلث CDE و BDA متشابهند (بچه دلیل) پس



ش ۹۷

اولاً $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{BC}$

ثانیاً $\frac{DC}{BD}=\frac{EC}{AB}$

یا اولاً $AD \times BC = BD \times AE$

و ثانیاً $DC \times AB = BD \times EC$

از جمع دو تساوی اخیر حاصل میشود

$$AD \times BC + AB \times DC = BD \times EC = BD(AE+EC) = BD \times AC$$

۳۹۴ـ اگر BD بر قطر دایره منطبق باشد (بمرکز بگذرد) DE بر AC عمود میشود (بچه دلیل؟) و بنابراین ارتفاع مثلث ADC خواهد بود اما بتشابه دو مثلث ADE و BDC این تناسب حاصلست یعنی $\frac{AD}{BD}=\frac{ED}{DC}$

و لهذا قضیهٔ ذیل محقق است $AD \times DC = BD \times DE$

قضیهٔ ۹۶ـ در هر مثلث مسطح دو ضلع معادل است با مسطح قطر دایرهٔ محیطیه در ارتفاع نظیر ضلع سوم

یعنی ($bc = 2Rh_a$ و $ac = 2Rh_b$ و $ab = 2Rh_c$)



۳۹۵ - **نتیجه** - چون طرفین تساوی فوق را در c ضرب نمائیم چنین میشود

$abc = 2 r c h_c$ اما چون $c h_c$ ضعف مساحت مثلث است حاصل میگردد

$abc = 4 S r$ که از آن استخراج میکنیم

$$r = \frac{abc}{4S} \quad \text{یا} \quad S = \frac{abc}{4r}$$

چون مساحت مثلث را بحسب اضلاع میدانیم بوسیله رابطه اخیر ممکنست r را بحسب اضلاع حساب کرد

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

۳۹۶ - **قضیه ۹۷** - در هر مثلث مربع منصف الزاویه مساویست با فضل مسطح دو ضلع حاوی آن بر مسطح دو قطعه ضلع سوم

برهان - اگر در شکل سابق AC منصف زاویه BAD باشد دو مثلث ABC و AFD متشابه میشوند پس $\frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AD}$ و لهذا

$$AB \cdot AD = AF \cdot AC = AF(AF + FC) = AF^2 + AF \cdot FC$$

لیکن به ق ۸۹ $AF \times FC = DF \times BF$ و بنابراین رابطه فوق چنین میشود

$$AB \cdot AD = AF^2 + DF \cdot BF$$

که از آن نتیجه میگردد

$$AF^2 = AB \cdot AD - DF \cdot BF$$

۳۹۷ـ **مسئله** ــ سه ضلع مثلثی معلوم است میخواهیم سه منصف الزاویه آن را حساب کنیم

حل ــ فرض میکنیم v_α ضلع a را بدو قطعه a_b و a_c منقسم نماید پس بقضیهٔ فوق این معادله حاصل است

$$v_\alpha^2 = bc - a_b \cdot a_c$$

ولی بقضیهٔ ۷۴ $\frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c}$ یا بترکیب نسبت $\frac{a_b + a_c}{a_c} = \frac{b+c}{c}$ و چون $a_b + a_c = a$

از تساوی اخیر مقدار a_c معلوم میشود $a_c = \frac{ac}{b+c}$ و بهمین طریق معلوم میکنیم که $a_b = \frac{ab}{b+c}$ و بنابراین

$$v_\alpha^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

یا

$$v_\alpha^2 = \frac{bc(b+c)^2 - a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc}{(b+c)}\left[(b+c)^2 - a^2\right]$$

اما $(b+c)^2 - a^2 = (a+b+c)(b+c-a) = 4p(p-a)$

بنابراین

$$v_\alpha^2 = \frac{4bc\,p(p-a)}{(b+c)^2}$$

یعنی

$$v_\alpha = \frac{2}{b+c}\sqrt{bc\,p(p-a)}$$

و بتبدیل α به β یا γ معلوم میشود

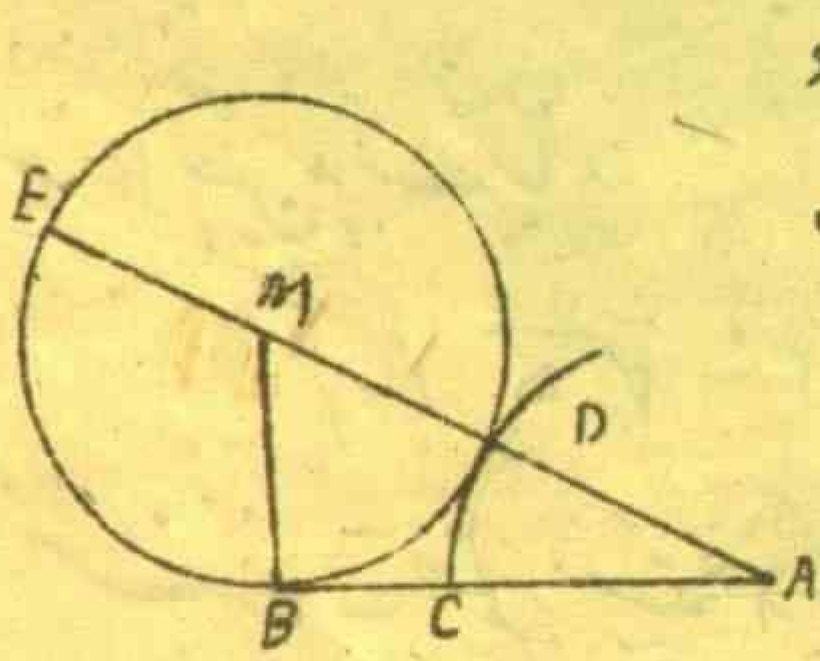
$$v_\beta = \frac{2}{a+c}\sqrt{ac\,p(p-b)} \qquad v_\gamma = \frac{2}{a+b}\sqrt{ab\,(p-c)}$$

د- نسبت ذات وسط وطرفین

۳۹۸ - **تعریف** - هرگاه نقطه C قطعه AB را بر دو جزو AC و BC بقسمی مجزی نموده باشد که جزو AC واسطه هندسی AB و BC باشد گویند AB بر نسبت ذات وسط و طرفین (ذ و ط) تقسیم شده

۳۹۹ - **مسئله** - میخواهیم قطعه AB ش ۹۸ را بر نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم کنیم

رسم - بر نقطه B عمودی بطول $\frac{AB}{2}$ اخراج نموده از مرکز M بشعاع $MB=\frac{AB}{2}$ دایره رسم میکنیم که بر نقطه B با AB مماس شده و AM را بر نقطه D و E قطع میکند حال چون AD را بوسیله قوس DC بر AB نقل کنیم AB بر نقطه C به نسبت ذ و ط تقسیم میشود



ش ۹۸

برهان - به قضیه ۹۲ این تناسب حاصلست

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AD}$$

یا بتفصیل نسبت

$$\frac{AE-AB}{AB}=\frac{AB-AD}{AD}$$

ولی چون شعاع دایره $\frac{AB}{2}$ است $DE=AB$

و بنابراین

$$AE-AB=AE-DE=AD=AC$$

وبعلاوه $AD = AC$ و $AB - AD = AB - AC = BC$

پس تناسب فوق چنین میشود $\frac{AC}{CB} = \frac{BC}{AC}$ وهوالمطلوب

۴۰۰ _ مسئله _ مطلوبست محاسبهٔ دو جزء AB که بنسبت ذوط تقسیم شده

حل ــــ از س ۹۸ ظاهر است که

$$AC = AD = AM - MD = AM - \frac{AB}{2}$$

لیکن از مثلث قائم الزاویه AMB حاصل میگردد

$$AM^2 = AB^2 + MB^2 = AB^2 + \frac{AB^2}{4} = \frac{5AB^2}{4}$$

پس $AM = \sqrt{\frac{5AB^2}{4}} = \frac{AB}{2}\sqrt{5}$

ولهذا $AC = \frac{AB}{2}\sqrt{5} - \frac{AB}{2} = \frac{AB}{2}(\sqrt{5} - 1)$

چون اینمقدار را از AB تفریق کنیم بعد از اختصارات لازمه مقدار

BC چنین بدست میآید

$$BC = \frac{AB}{2}(3 - \sqrt{5})$$

تنبیه _ تقسیم بنسبت ذوط بتقسیم نقصانی نیز ممکن است

وکافی است که بعوض نقل AD بر AB قطعه AE را بر امتداد

BA نقل کنند (استنباط صحت تقسیم برعهدهٔ متعلم است)

کتاب چهارم - کثیر الاضلاع منتظم و مساحت دایره

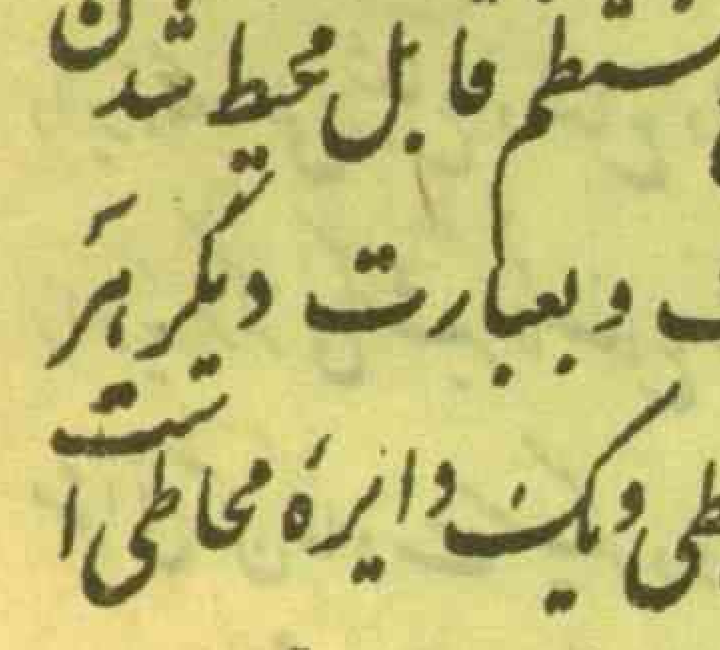
فصل اول - کثیر الاضلاع منتظم

۱ - اشکال منتظم محیطی و محاطی در دایره

۴۰۱ - **تعریف** - کثیر الاضلاع منتظم شکلی است که جمیع اضلاعش متساوی و جمیع زوایایش نیز متساوی باشند

۴۰۲ - **قضیهٔ ۹۸** - هر کثیر الاضلاع منتظم قابل محیط شدن بر دایره و محاط شدن در آن است و بعبارت دیگر هر کثیر الاضلاع منتظم را یک دایرهٔ محیطی و یک دایرهٔ محاطی است

برهان - اولاً فرض میکنیم M ۹۹ نقطهٔ تلاقی دو عمود منصف AB و BC که دو ضلع کثیر الاضلاع‌اند باشد و از M بجمیع رئوس کثیر الاضلاع وصل میکنیم چنانکه از سابق میدانیم نقطه M از سه نقطه A و B و C بیک فاصلت است



بعلاوه چنانکه از انطباق واضح میشود دو ذو اربعة الاضلاع ABHM و DCHM متساویند زیرا MH = MH و $\widehat{BHM} = \widehat{CHM}$ ۱۰۳

و $BH = CH$ و $\hat{B} = \hat{C}$ و $AB = DC$ پس $MA = MD$ و بهمین طریق

معلوم میشود که نقطه M از سایر رؤس نیز بفاصله MA واقعست و لهذا دایره که از مرکز M

باشعاع MA رسم شود بر جمیع رؤس کثیر الاضلاع مرور نموده بر آن محیط میشود

ثانیاً چون اضلاع کثیر الاضلاع اوتار متساویه از دایره محیطیه محسوب میشوند از مرکز دایره M نقطه بیک فاصله‌اند

وبنابراین دایره که از مرکز M باشعاع MH رسم شود باجمیع اضلاع مماس شده ودر کثیر الاضلاع محاط میگردد

۴۰۳ــ **تعریف** ــ مرکز مشترک دو دایره محیطی و محاطی را مرکز کثیر الاضلاع گویند شعاع

دایره محیطی را شعاع وشعاع دایره محاطی را ارتفاع کثیر الاضلاع نامند

زاویه مرکزی کثیر الاضلاع زاویه ایست که مابین دوشعاع متوالی یا دو ارتفاع

متوالی آن حادث میگردد

۴۰۴ــ **نتیجه** ــ چون زوایای مرکزی کثیر الاضلاع منتظم متساویند

اگر عدد اضلاع را n فرض کنیم مقدار هر زاویه مرکزی $\frac{4}{n}$ قائمه خواهد بود

۴۰۵ــ **قضیه ۹۹** ــ چون محیط دایره را باجزاء متساویه قسمت کنیم

ونقاط تقسیم را وصل نمائیم کثیر الاضلاع محاطی حاصل منتظم است واگر بر نقاط

تقسیم خطوط مماس بکشیم کثیر الاضلاع محیطی منتظمی تشکیل میشود

برهان ــ برای اثبات جزو اول قضیه مرکز را بنقاط تقسیم وصل نموده بملاحظه

تساوی اوتار تساوی مثلثات متساوی الساقین را استنباط میکنیم ضمناً معلوم میشود که اشعهٔ زوایای کثیر الاضلاع را نصف میکند

برای اثبات جزء دوم علاوه بر تساوی اوتار ملاحظه میکنیم که زوایای بین مماسهای اوتار همه متساویند

۴۰۶ - فرع - اگر مماسها بموازات اوتار مرسومه رسم کنیم باز کثیر الاضلاع منتظم محیطی حاصل میگردد

ب - تقسیم محیط دایره بعدد پرگار و ستاره

۴۰۷ - مسئله ۱ - میخواهیم در دایرهٔ بشعاع ر مربعی محاط نموده اجزای مختلفه اش را حساب کنیم

حل - اولاً چون زاویهٔ مرکزی ۹۰ درجه است کافی است در دایرهٔ دو قطر عمود بیکدیگر رسم کنیم تا رؤس مربع بدست آید (محیط بر ۴ جزء متساوی منقسم گردد) ثانیاً چون ضلع مربع را $ض_۴$ فرض کنیم مثلثی که از وصل طرفین آن بمرکز حاصل میشود قائم الزاویه و متساوی الساقین است پس معلوم میشود که $ض_۴^۲ = ر^۲ + ر^۲ = ۲ر^۲$ یعنی $ض_۴ = ر\sqrt{۲}$

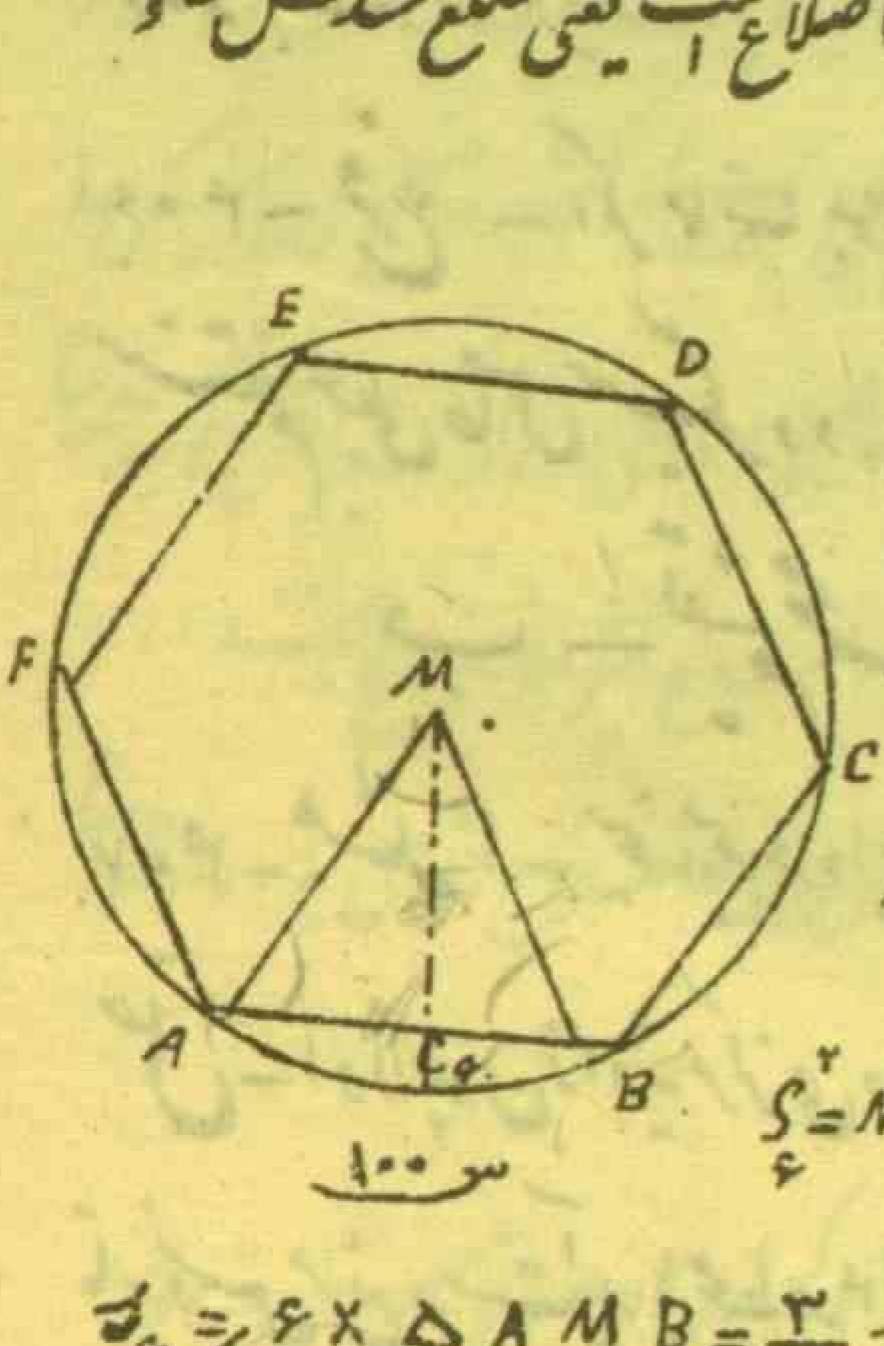
محیط مربع را $ح_۴$ فرض میکنیم پس $ح_۴ = ۴ر\sqrt{۲}$

ارتفاع مربع را $ع_۴$ فرض میکنیم ثابت کنند که $ع_۴ = \frac{ر}{۲}\sqrt{۲}$

مساحت مربع را به $م_۴$ مینمائیم پس $م_۴ = ۲ر^۲$

۴۰۸ـ مسئله ۲ ـ میخواهیم در دایرهٔ بشعاع ر مسدس منتظمی محاط نموده اجزاء آنرا حساب کنیم

حل ـ س ۱۰۰ اولاً اگر A B ضلع مسدس باشد $\widehat{AMB}$ سدس ۴ قائمه یعنی ۶۰ خواهد بود و چون مثلث A M B متساوی الساقین است هریک از دو زاویهٔ A و B نیز ۶۰ است لذا مثلث A M B متساوی الاضلاع است یعنی ضلع مسدس مساوی با شعاع است



پس برای رسم مسدس کافیست فتحه پرگار را مساوی شعاع نموده قوسهای متساوی از محیط جدا کنیم ثانیاً بنابر آنچه مذکور شد

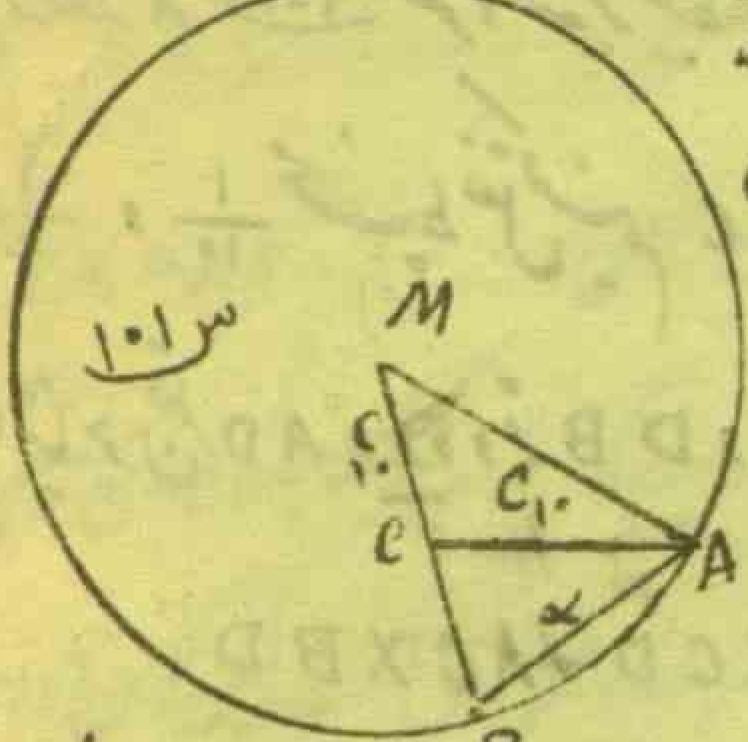
ض۶ = ر و ع۶ = $\frac{ض_۶}{۲}$ اما از مثلث قائم الزاویه MAG

نتیجه میشود $ع_۶^۲ = \overline{MG}^۲ = ر^۲ - (\frac{ض_۶}{۲})^۲ = ر^۲ - \frac{ر^۲}{۴} = \frac{۳ر^۲}{۴}$

پس $ع_۶ = \frac{ر}{۲}\sqrt{۳}$ وبنابراین $س_۶ = ۶ \times \triangle AMB = \frac{۳}{۲} ر^۲ \sqrt{۳}$

۴۰۹ـ مسئله ۳ ـ میخواهیم در دایرهٔ بشعاع ر معشری محاط نموده اجزاء آنرا حساب کنیم

حل ـ اولاً اگر A B ضلع معشر باشد س ۱۰۱ $\widehat{MAB}$ که زاویهٔ مرکزی آنست $\frac{۳۶۰}{۱۰}$ یعنی ۳۶ خواهد بود ولهذا هریک از دو زاویهٔ A و B از مثلث متساوی الساقین M A B ۷۲ میشود حال اگر زاویهٔ A را بخط A C نصف کنیم مثلث A C B نیز مثلثی متساوی الساقین میگردد که زاویهٔ راس آن $\widehat{BAC}$ مساوی ۳۶ است



پس $MAB \backsim ABC$ وازاینجا نتیجه میشود $\frac{MB}{AB}=\frac{AB}{BC}$ اما مثلث MAC نیز متساوی الساقین است (بچه دلیل) پس $AB=AC=MC$

وبنابراین $\frac{MB}{MC}=\frac{MC}{BC}$

یعنی شعاع MB بر نقطهٔ C بنسبت ذ و ط منقسم شده چون MC مساوی با ضلع معشر است معلوم میشود که اگر شعاع دایره را بر نسبت ذ و ط تقسیم کنیم جزء اعظم آن ضلع معشر محاطی خواهد بود وثانیاً موافق آنچه ذکر شد با ملاحظه مسئله نمره ۴۰۰ $c_{10}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$

ولذا $p_{10}=10\,c_{10}=5r(\sqrt{5}-1)$

بواسطه قضیه عروس معلوم میشود که $a_{10}=\frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

وچون ساحت معشر ده برابر مثلث AMB است $s_{10}=\frac{5}{4}r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

۴۱۰ ـ **مسئله ۴** ـ در دایره کثیرالاضلاع پانزده ضلعی محاط نمود ضلع آنرا حساب کنید

حل ـ اولاً چون زاویهٔ مرکزی ۱۵ ضلعی $\frac{360}{15}$ یعنی ۲۴ است و از طرف دیگر $60-36=24$ ($\frac{1}{15}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$) معلوم میشود که ضلع پانزده ضلعی وتر قوسی است که از تفریق قوس مسدس و قوس معشر باقی میماند یعنی بجهت رسم آن کافی است ابتدا

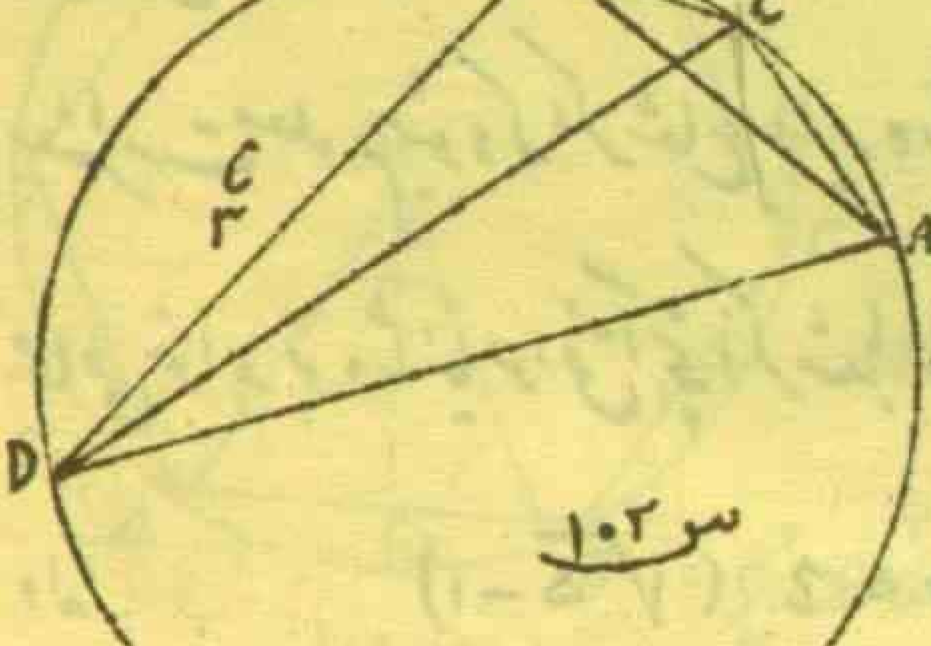
از نقطهٔ A س ۱۰۲ مفروضه بر محیط دو قوس AB و AC را در یکجهة ترتیب مساوی

$\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{10}$ محیط نقل کنیم BC ضلع پانزده ضلعی است

ثانیاً چون قطر AD و دو وتر DB و DC را وصل کنیم بمقتضیهٔ بطلمیوس حاصل میشود

$$BC \times AD = AB \times CD - AC \times BD$$

لیکن از دو مثلث قائم الزاویه ABD و ACD نتیجه میشود



$$CD = \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{4ح^2 - c^2}$$

و $BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{4ح^2 - c_6^2}$

وچون $BC = c_{15}$

رابطهٔ فوق بعد از جمیع اختصارات چنین میشود $c_{15} = \frac{ح}{4}\left(\sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15}\right)$

۴۱۱ ـ تنبیه ۱ ـ چون رؤس مسدس ومعشر را تخلی وصل کنیم مثلث ومخمس محاطی حاصل میگردد که محاسبهٔ ضلع آنها بر عهدهٔ متعلم است

۴۱۲ ـ تنبیه ۲ ـ چون تضعیف قوس بوسیلهٔ پرگار وستاره ممکن است معلوم میشود که از روی کثیر الاضلاع n ضلعی میتوان کثیر الاضلاع 2n ضلعی در دایره محاط نمود پس بعدد ۴ مسئلهٔ فوق چهار قسم کثیر الاضلاع منتظم را میتوان با پرگار وستاره در دایره محاط ورسم نمود

اوّلاً - مربع و مثمن و ۱۶ ضلعی و ۳۲ ضلعی و . . . . 2^n ضلعی

ثانیاً - مثلث و مسدس و ۱۲ ضلعی و ۲۴ ضلعی و . . . . 3×2^n ضلعی

ثالثاً - مخمس و معشر ۲۰ ضلعی و ۴۰ ضلعی و . . . . 5×2^n ضلعی

رابعاً - ۱۵ ضلعی و ۳۰ ضلعی و ۶۰ ضلعی و . . . . $3\times5\times2^n$ ضلعی

۴۱۳ - تنبیه ۳ - مدتها چنین تصور میشد که اقسام کثیرالاضلاعهای منتظمی که میتوان با پرگار و ستاره در دایره محاط نمود منحصر بچهار قسم فوق است لیکن گوس (Gauss) مهندس بزرگ و معروف آلمانی ثابت کرد که بعد از این دو آلت ممکنست کثیرالاضلاعهائی در دایره محاط نمود که عدد اضلاعشان $1+2^{2^n}$ باشد بشرطیکه عدد $1+2^{2^n}$ فرد اوّل باشد لیکن برای سایر اعداد فرد محال است

چون در دستور گوس بجای n اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ قرار دهیم اعداد ۳ و ۵ و ۱۷ و ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ که اعداد اول میباشند حاصل میگردد پس بوسیلهٔ پرگار ممکنست دایره را بر ۳ و ۵ و ۱۷ و ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ جزء متساوی منقسم ساخت اعداد دیگر که بازاء ۵ و ۶ و ۷ = n حاصل میشود عدد اول نیستند

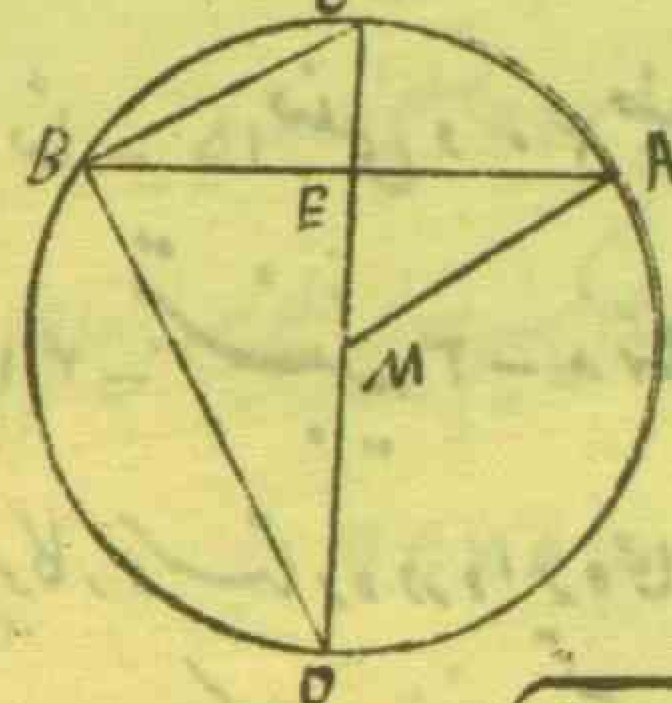
(ذکر این وسائل محتاج بمقدمات عدیده است که مقام مناسب ایراد آنها نیست)

۴۱۴ - مسئله ۵ - ضلع کثیرالاضلاع n ضلعی C_n و شعاع دایره محیطی R معلوم است

میخواهیم c_{2n} را معلوم کنیم

حل - فرض میکنیم AB (ش ۱۰۳) ضلع کثیر الاضلاع مفروض باشد $\rho_n = ME$

ارتفاع آن پس CE که تصویر BC (یعنی c_{2n}) برشعاع MC است مساوی با



ش ۱۳۰

$r - \rho_n$ خواهد بود و بموجب نتیجه ۳۷۲

$$CB^2 = CD \times CE$$

یعنی $c_{2n}^2 = 2r(r - \rho_n)$

پس $c_{2n} = \sqrt{2r(r - \rho_n)}$

اما بقضیهٔ عکس مقدار ρ_n چنین بدست میاید $\rho_n = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - c_n^2}$

ولهذا $c_{2n} = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - c_n^2})}$

مثال ۱ - $c_4 = r\sqrt{2}$ و $\rho_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2}$ پس $c_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

وچون $\rho_8 = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ پس $c_{16} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

وقس علیهذا $c_{32} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ وغیره

مثال ۲ - $c_6 = r$ و $\rho_6 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ پس $c_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$

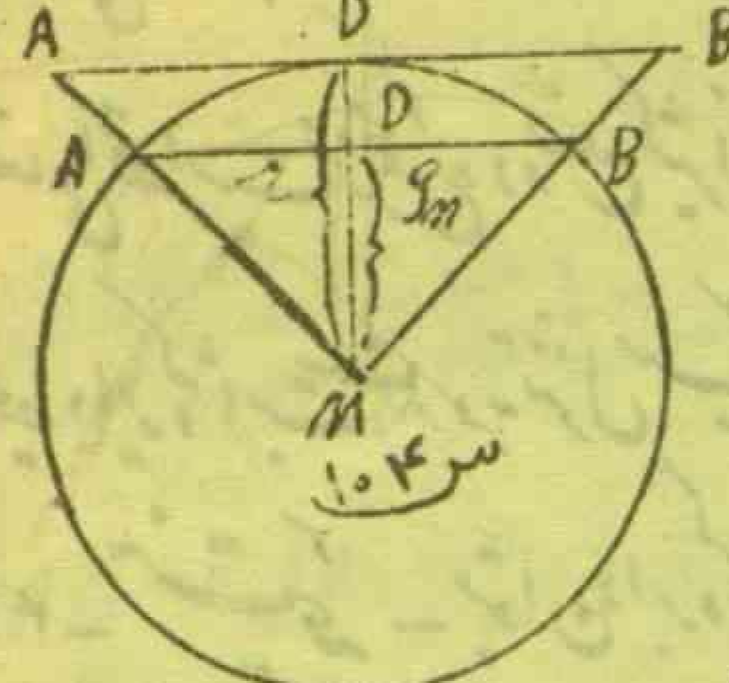
وچون $\rho_{12} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ $c_{24} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

۲۱۵ - مسئلهٔ ۶ - ضلع c_n و شعاع r از کثیر الاضلاع طبیعی معلوم است مطلوب محاسبهٔ K_n (ضلع کثیر الاضلاع محیطی)

حل - دو مثلث MAB و M A' B' (ش ۱۰۴) متشابهند چون ρ_n و r

دو ارتفاع این دو مثلث سیباشد این تناسب حاصل است

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{r}{\rho_n}$$



یا

$$\frac{K_n}{C_n} = \frac{r}{\rho_n}$$

ولهذا

$$K_n = \frac{r\,C_n}{\rho_n}$$

وچون

$$\rho_n = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - C_n^2}$$

معلوم میشود

$$K_n = \frac{2\,r\,C_n}{\sqrt{4r^2 - C_n^2}}$$

فصل دوم — محاسبه محیط و مساحت دایره

۱ — دستور مساحت و محیط دایره

۴۱۶ - **تعریف** — حد هر تغییر پذیر مقدار ثابت معینی است که مقدار متغیر مفروض ما در حین تغییر هرچه بخواهیم بدان نزدیک شود لیکن هرگز مساوی با آن نگردد

از این تعریف معلوم میشود که تفاوت مابین متغیر و حد آن ممکنست از هر مقدار مفروضی کوچکتر گردد و بالعکس هر وقت تفاوت مابین متغیر مفروض و مقدار ثابت معینی تواند از هر مقدار مفروض کوچکتر گردد آن مقدار ثابت همان حد متغیر مفروض است

۴۱۷ - **قضیه ۱۰۰** - محیط دایره حد محیط کثیر الاضلاع منتظم محاطی است بنابرآنکه عدد اضلاع بتضاعیف ترقی نموده از هر مقدار مفروضی بزرگتر گردد

برهان — اولاً واضح است که محیط دایره همواره از محیط کثیر الاضلاع محاطی اعظم است

(زیرا ضلع کثیر الاضلاع مستقیم و لذا اقصر فاصله بین دو نقطه محیط است)

ثانیاً وقتی عدد اضلاع مضاعف شود محیط کثیر الاضلاع محاطی ترقی میکند (زیرا هر ضلع کثیر الاضلاع n ضلعی اقصر است از مجموع دو ضلع کثیر الاضلاع $2n$ ضلعی) و لهذا تفاوت محیط آن با محیط دایره که ثابت است رو به تنزل میگذارد و ممکن است از هر مقدار مفروضی کوچکتر گردد

۴۱۸ - **نتیجه** - میتوان دایره را کثیر الاضلاع منتظمی شمرد که عدد اضلاعش بینهایت (∞) باشد

۴۱۹ - **قضیهٔ ۱۰۱ - نسبت محیط دایره بقطر خود مقداریست ثابت**

برهان - در دو دایره بشعاع r و r' دو کثیر الاضلاع منتظم n ضلعی محاط میکنیم چنین دو کثیر الاضلاع متشابهند (بحکم دلیل) پس اگر دو محیط را p_n و p'_n فرض کنیم این تناسب برقرار است

$$\frac{p'_n}{2r'} = \frac{p_n}{2r} \quad (\text{ق } 88)$$

حال چون n را متضاعف ترقی دهیم و مراتب تضاعیف را بینهایت کنیم حاصل میشود $\frac{p'_\infty}{2r'}$ $\frac{p_\infty}{2r}$

لیکن بموجب قضیهٔ سابق p_∞ محیط دایرهٔ اول و p'_∞ محیط دایره ثانی است پس چون محیط دو دایره را c و c' فرض کنیم نتیجه میشود $\frac{c'}{2r'} = \frac{c}{2r}$ و هو المطلوب

۴۲۰ - **قرارداد** - عادت بر این جاری شده که نسبت محیط بقطر را بحرف یونانی π (پی) بنامند

۴۲۱ - **نتیجهٔ ۱ - طول محیط دایره مساویست با حاصل ضرب قطر آن در مقدار π**

زیرا چون بقضیهٔ فوق $\pi = \frac{c}{2r}$ از ضرب طرفین در $2r$ حاصل میشود

$$c = 2r.\pi$$

۴۲۲ - **نتیجه ۲** - **طول قوس مساویست با حاصل ضرب نصف محیط در نسبت عدد** درجات قوس به ۱۸۰ زیرا اگر عدد درجات قوس را م و طول آنرا $ق_م$ فرض کنیم چون محیط دایره ۳۶۰ است این تناسب حاصل میگردد

$$\frac{ق_م}{۲ر\pi} = \frac{م}{۳۶۰}$$

که از آن استخراج میشود

$$ق_م = \frac{۲ر\pi م}{۳۶۰} = \pi ر \cdot \frac{م}{۱۸۰}$$

۴۲۳ - **نتیجه ۳** - **مساحت دایره مساوی است با حاصل ضرب π در مجذور شعاع**

زیرا میتوان سطح دایره را مرکب از عده بینهایتی مثلثات متساوی الساقین دانست که از وصل نقاط مختلفهٔ محیط بمرکز حاصل شده باشند و چون همه در ارتفاع مشترکند مساحت مجموعشان یعنی سطح دایره مساویست با مجموع قواعد آنها یعنی محیط دایره در نصف ارتفاع مشترک ر پس

$$س = ۲ر\pi \frac{ر}{۲} = \pi ر^۲$$

۴۲۴ - **فرع** - چون $\pi ر^۲ = س$ و $\frac{c}{۲\pi} = ر$ پس $س = \pi \times \left(\frac{c}{۲\pi}\right)^۲$ یا

$$س = \frac{۱}{\pi} \times \left(\frac{c}{۲}\right)^۲$$ یعنی

مساحت دایره مساویست با مجذور نصف محیط ضرب در عکس π

(ضمناً معلوم است که سطح دایره حاصل ضرب نصف محیط در شعاع است $س = \frac{c}{۲} \times ر$)

۴۲۵ - **تعریف** - قطاع دایره قسمتی است از سطح دایره که ما بین دو شعاع یک

قوس محصور باشد و قطعه دایره قسمتی است از سطح آن که مابین قوس و وتر محصور است

۴۲۶ - **نتیجه ۴ - مساحت قطاع مساویست بحاصل ضرب سطح دایره در نسبت عدد درجات قوس قاعدهٔ آن به ۳۶۰**

زیرا مساحت قطاعی که قوس قاعده‌اش ۱ است $\frac{1}{360}$ سطح دایره خواهد بود پس اگر قاعدهٔ قطاع ه درجه باشد چون مساحت آنرا س فرض کنیم معلوم میشود که

$$\text{س} = \frac{\pi \, \text{ر}^2 \, \text{ه}}{360}$$

۴۲۷ - **فرع** - میتوان گفت مساحت قطاع مساویست با حاصل ضرب نصف شعاع در طول قوس قاعده‌اش

زیرا $\text{س} = \frac{\pi \, \text{ر}^2 \, \text{ه}}{360} = \frac{\text{ر}}{2} \times \frac{\pi \, \text{ر} \, \text{ه}}{180} = \frac{\text{ر}}{2} \times \text{ق}$

۴۲۸ - **فرع** - مساحت قطعه دایره فضل قطاعی است که شامل آن باشد بر مثلثی متساوی الساقین که قاعده‌اش وتر این قطعه و ساقینش دو شعاع دایره باشد و بنابراین محاسبهٔ قطعه وقتی بقواعد سابقه ممکنست که وتر آن معلوم باشد مثلاً وتر قطعه ضلع کثیرالاضلاع منتظمی باشد که در محاسبهٔ آن امکان دارد

ب - محاسبهٔ π

۴۲۹ - اگر ... شعاع را واحد فرض کنیم معلوم میشود که π

نصف محیط دایره ایست که شعاع آن واحد طول باشد پس برای محاسبهٔ π کافیست
نصف محیط چنین دایره را حساب کنیم و لهذا دو کثیر الاضلاع منتظم محاطی و محیطی که محیطشان
قابل محاسبه باشد در این دایره محاط و محیط میکنیم و بدو مسئله نمرهٔ ۴۱۴ و نمرهٔ ۴۱۵ عدد اضلاع را
بتضاعیف ترقی داده محیط کثیر الاضلاعهای محیطی و محاطی را معلوم نموده و در جدولی ثبت میکنیم
و چون محیط دایره همواره مابین دو کثیر الاضلاع واقع میشود در صورتیکه اختلاف مابین نیمه محیط کثیر الاضلاع
محیطی و نیمه محیط کثیر الاضلاع محاطی مقداری قلیل گردد میتوان هر یک را مقدار تقریبی π دانست
در جدول ذیل از مسدس که ضلع محاطی آن واحد است شروع و بکثیر الاضلاع ۱۵۳۶

عدد اضلاع n	نیمه محیط کثیر الاضلاع محاطی $\frac{1}{2} p n =$	نیمه کثیر الاضلاع محیطی $\frac{1}{2} P n =$
۶	۳	۳٫۴۶۴۱۰۱۶
۱۲	۳٫۱۰۵۸۲۸۵	۳٫۲۱۵۳۹۰۳
۲۴	۳٫۱۳۲۶۲۸۶	۳٫۱۵۹۶۵۹۹
۴۸	۳٫۱۲۹۳۵۰۲	۳٫۱۴۶۰۸۶۲
۹۶	۳٫۱۴۱۰۳۲۰	۳٫۱۴۲۷۱۴۶
۱۹۲	۳٫۱۴۱۴۵۲۵	۳٫۱۴۱۸۷۲۱
۳۸۴	۳٫۱۴۱۵۵۷۶	۳٫۱۴۱۶۶۲۸
۷۶۸	۳٫۱۴۱۵۸۲۹	۳٫۱۴۱۶۱۰۳
۱۵۳۶	۳٫۱۴۱۵۹۰۹	۳٫۱۴۱۵۹۷۰

ضلعی توقف کرده ایم چنانکه ملاحظه میشود اختلاف مابین دو نیمهٔ محیط دو کثیر الاضلاع

۱۵۳۶ ضلعی محیطی و محاطی از یک صد هزارم کوچکتر است و بنابراین چون مقادیر کوچکتر از یک صد هزارم را اعتنا نکنیم (یعنی صفر فرض کنیم) مقدار π چنین است

۳ و ۱۴۱۵۹

۴۳۰ - در محاسبات معمولی π را ۳٫۱۴۱۶ قرار میدهند پس باید این عدد را همواره حاضر الذهن داشت

۴۳۱ - عدد π را عدهٔ زیادی از مهندسین حساب کرده اند اولین کسی که متوجه حساب این مقدار گردیده ارشمیدس بوده که مقدار $\frac{۲۲}{۷}$ را بدست آورد بعد میتوس کسر $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ که تا شش رقم اعشار با π موافق است معلوم نموده و اختصاص آن این است که ضبطش سهل است از اینقرار که اعداد فرد اول او ۳ و ۵ را هر یک دو مرتبه از چپ براست مینویسیم آنوقت سه رقم سمت یسار را مخرج و سه رقم دیگر را صورت قرار میدهیم

ویئت تا ده رقم و لودلف تا ۳۵ رقم اعشار آنرا حساب کرده اند و امروز تا ۶۰۰ رقم اعشار آن بدست آمده لیکن واضحست که در عمل بندرت بیش از چهار یا پنج رقم استعمال میشود

اول دفعه در ۱۷۶۱ لامبرت اصم بودن π را ثابت نمود و این مسئله در

تاریخ ریاضیات اهمیتی بکمال دارد و در قرن ۱۹ مسیحی پروفور لیندمان ثابت نمود که رسم خطی مستقیم مساوی با π بدو پرگار و ستاره و بعبارة اخری شده تربیع دایره محال است

تمرینات

۱ - مطلوب است اثبات احکام ذیل

۱ - اگر در دو دایره دو زاویهٔ مرکزی مساوی باشند اولاً دو قوس مقابل بر نسبت دو شعاع و دو قطاع نظیر بر نسبت مربع دو شعاعند (چنین دو قوس و دو قطاع را متشابه گویند)

۲ - در دو دایره وقتی دو قوس از حیث طول متساوی باشند دو زاویهٔ مرکزی مقابل بر نسبت عکس دو شعاعند

۳ - در دو دایره نسبت دو زاویهٔ مرکزی مثل دو خارج قسمت قوسهای مقابل بر شعاع نظیر خود میباشند

۴ - چون بر دو ضلع مثلث قائم الزاویه دو نیم دایرهٔ خارج و بر وتر نیم دایره منطبق بر سطح مثلث رسم کنیم مابین آنها دو هلال تشکیل میشود که مجموعشان مساوی با مساحت مثلث است (هلالین بقراط)

۵ - نیم دایره مرسوم بر ضلع مربع محاطی با دایرهٔ هلالی تشکیل میدهد که سطحش نصف مربع شعاع است

۶ - مجموع مساحت چهار دایره که چهار قطعه دو وترعمود بر یکدیگر از دایرهٔ مفروضه قطر آنها باشد مساوی است با مساحت دایره مفروضه

۷ - سطح اکلیل مستدیر (سطح محصور مابین دو محیط دو دایرهٔ متحد المرکز) مساوی

با ساحت دایره ایست که قطرش با دایره کوچکتر مماس و بمحیط دایره بزرگتر منتهی شود

(شعاعش واسطه هندسی مابین مجموع و تفاضل دو شعاع اکلیل است)

ب ــ مطلوب است حل مسائل ذیل

مسئله ۱ ــ میخواهیم دایره رسم کنیم که محیط یا ساحتش n برابر محیط یا مساحت دایره مفروضه که شعاعش r است باشد

مسئله ۲ ــ میخواهیم کثیرالاضلاع منتظمی رسم کنیم که با کثیرالاضلاع منتظم محاط در دایره (r و M) متشابه باشد و محیط یا ساحتش ۲ یا ۵ یا ۷ برابر محیط یا مساحت کثیرالاضلاع مفروضی باشد

مسئله ۳ ــ میخواهیم سطح دایره مفروضه را اولاً با دایره متحدالمرکز نصف کنیم ثانیاً با دو دایره متحدالمرکز بر سه جزو متساوی منقسم سازیم ثالثاً با دو دایره متحدالمرکز بر نسبت ۲ و ۳ و ۴ تقسیم کنیم

مسئله ۴ ــ دایره رسم کنید که نسبتش بدایره مفروضه مثل ۳ به ۴ یا ۵ به ۴ یا ۳ به ۵ باشد

مسئله ۵ ــ دایره رسم کنید که ساحتش با دو ساحت r و r' از دو دایره مفروضه یکی از شش رابطه ذیل را داشته باشد

اولاً د″ + د′ = د ثانیاً د″ − د′ = د ثالثاً د″ ۳ + د′ = د

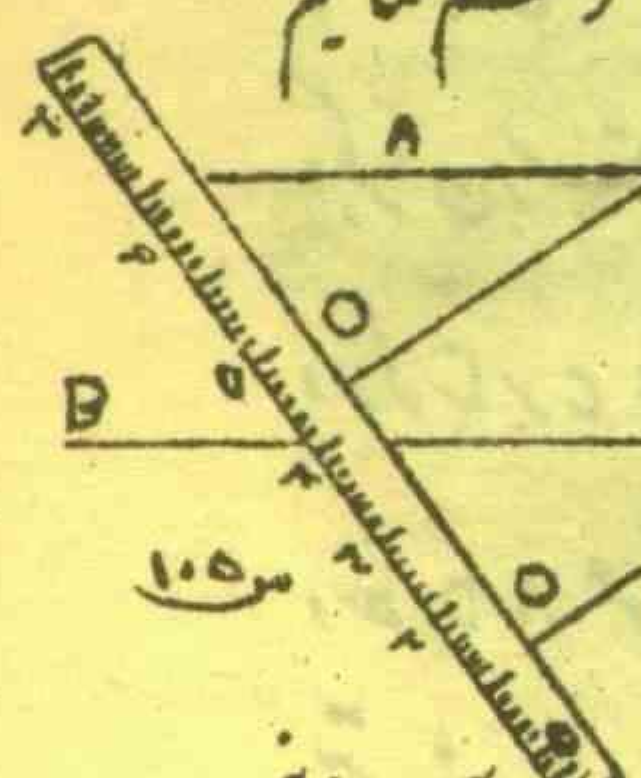
رابعاً د″ ۳ + د′ ۲ = د خامساً د″ ۲ − د′ ۳ = د سادساً د″ ۲/۳ ± د′ ۲/۳ = د

خاتمه

۱ – استعمال گونیا در ترسیمات هندسی – تعریف – گونیا

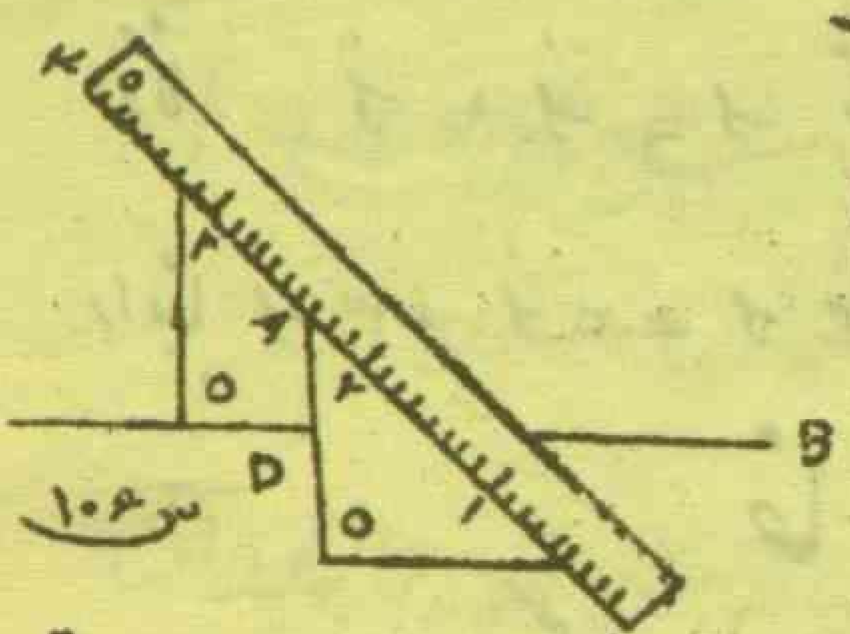
مثلثی است قائم الزاویه که معمولاً از چوب میسازند و برای اخراج عمود و رسم خطوط متوازیه در کار است و کیفیت استعمال آن از دو مسئلهٔ ذیل استنباط میشود

مسئلهٔ ۱ – میخواهیم از نقطهٔ A س ۱۰۵ خطی بموازات BC رسم نمائیم



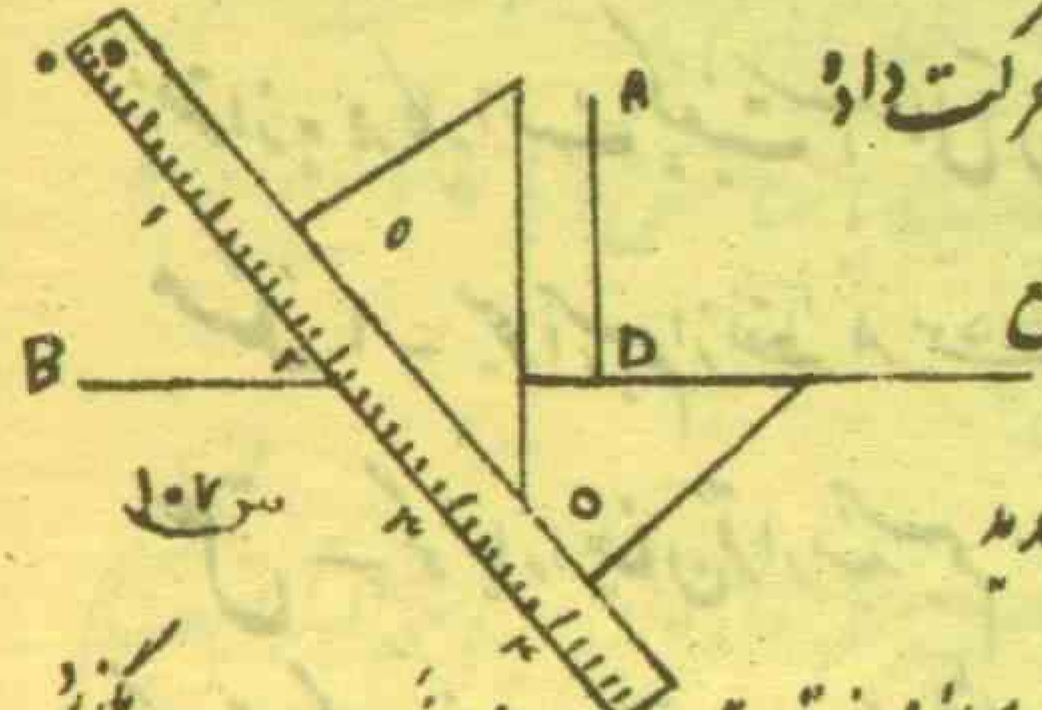
حل – گونیا را چنان قرار میدهیم که وتر یا یک ضلعش بر خط BC منطبق باشد ستاره را چنانکه در شکل دیده میشود بر ضلع دیگر گونیا تکیه داده آنوقت ستاره را ثابت نگاه داشته گونیا را در کنار آن میلغزانیم تا ضلعی که بر BC منطبق بوده بنقطهٔ A بگذرد خطی که در کنارهٔ این ضلع رسم کنیم بر نقطهٔ A گذشته و با BC موازی خواهد بود (یافتن دلیل بر عهدهٔ متعلم است)

مسئلهٔ ۲ – میخواهیم از نقطهٔ مفروضه عمودی بر خط مفروض رسم کنیم



حل ۱ – یکضلع گونیا را بر خط مفروض BC ۱۰۶ منطبق نموده و ستاره را بر وتر گونیا تکیه داده محکم نگاه میداریم و گونیا را آنقدر میلغزانیم تا ضلع دیگر بر نقطهٔ مفروضه (A یا D) مرور کند خطی که در کنار این ضلع رسم شود عمود مطلوب است

حل ۲ – وتر گونیا را بر خط مفروض BC ۱۰۷ منطبق نموده ستاره را بر یکضلع آن تکیه داده ثابت نگاه میداریم و گونیا را حرکت داده چنانکه در شکل دیده میشود بقسمی قرار میدهیم که ضلع دیگر آن بر ستاره متکی شود و در وضع جدید

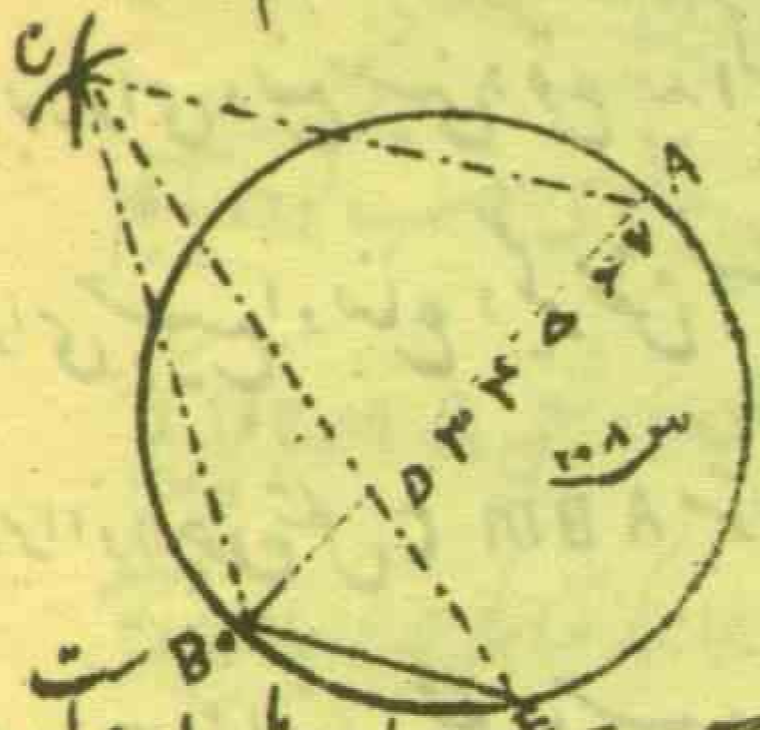


وتر گونیا بر BC عمود است حال گونیا را میلغزانیم تا وتر بر نقطهٔ مفروضه (A یا D) بگذرد و خط AD عمود مطلوب است

تنبیه – اعمالیکه با گونیا مجری میشود چندان دقیق نیست و بیشتر وقتی گونیا را استعمال میکنند که رسم چندین متوازی یا چندین عمود مطلوب است

ب – قاعدهٔ تقریبی بجهة تقسیم محیط دایره – بسا اتفاق میافتد که بخواهیم محیط دایره را بر اجزاء متساویهٔ چند غیر از آنچه سابق ذکر شده تقسیم نمائیم و چنانکه متعرض شدیم حل این مسئله بطور کلی ممکن نیست لیکن قاعدهٔ ذیل مسئله را با تقریبی عموماً کافی حل میکنند

قاعده – بجهة تقسیم محیط دایره بر n جزء متساوی قطر AB صفحه ۱۰۸ را رسم نموده آنرا بر n جزء متساوی (در شکل n را هفت فرض کرده‌ایم) منقسم ساخته و مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را رسم میکنیم



(تعیین نقطهٔ C کافیست) حال جزو نقطهٔ دوم تقسیم یعنی نقطهٔ D را به نقطهٔ C وصل کنیم امتداد این خط دایره را بر نقطهٔ E قطع میکند قوس BE مساوی با $\frac{1}{n}$ محیط است

تقریباً (BE تقریباً ضلع کثیرالاضلاع n ضلعی است)

تنبیه – برای ۳ و ۴ و ۶ قاعده جواب تحقیقی میدهد

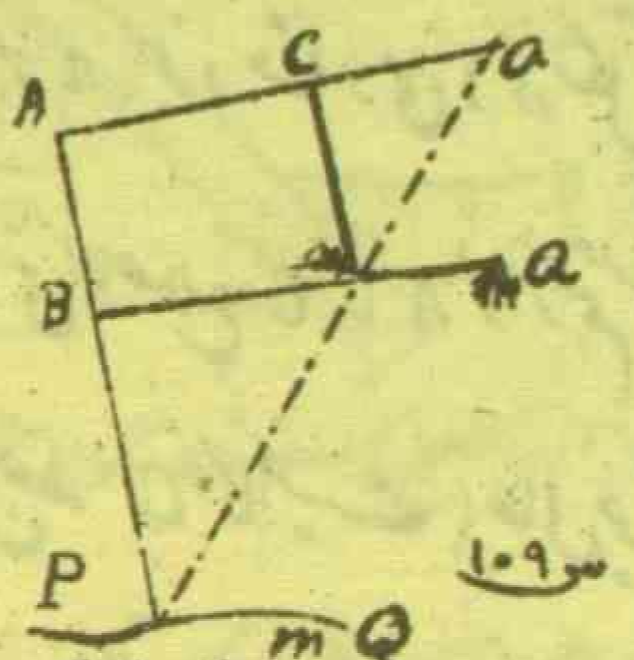
(ضمیمه)

۱ – پانتوگراف

۱ – پانتوگراف اسبابی است که برای رسم شکلی مشابه با شکل مفروض مستعمل است و اغلب برای کوچک یا بزرگ کردن نقشه یا هرگونه تصویر دیگر بکار میرود

۲ – این آلت اصولاً مرکب است از چهار ستاره OA و AM و BM و CM صفحه ۱۰۹ که در نقاط A و B و C و M مفصل شده و تابع دو شرط ذیل است اولاً شکل ABMC متوازی‌الاضلاع است

ثانیا سه نقطه o و m و m' بریک استقامتند



ش ۱۰۹

۳ـ بسهولت دیده میشود که اگر دو شرط مزبور برای وضع معینی وقوع پیدا کند برای جمیع اوضاع دیگر محقق است

زیرا اولا چون شکل $ABMC$ متوازی الاضلاع است دو زاویه متقابلش متساوی خواهند بود و بنا براین شکل در جمیع اوضاع متوازی الاضلاع میماند ثانیا بالفرض سه نقطه o و m و m' بریک استقامتند پس دو مثلث Amo و Cmo متشابهند ولذا

$$\frac{OA}{AM} = \frac{OC}{CM'}$$

اما طول این چهار قطعه خط ثابت است پس تناسب فوق برای جمیع اوضاع برقرار میماند اما نظر بتوازی AB و CM' دو زاویه OAB و OCM' همواره متساویند پس دو مثلث OAM و OCM' همواره متشابهند و بنا براین دو زاویه AOM و COM' در جمیع اوضاع متساوی و بریکدیگر منطبقند یعنی سه نقطه M و M' و O بریک استقامتند

۴ـ از تشابه دائمی دو مثلث متغیر OCM و OAM معلوم میشود که همواره

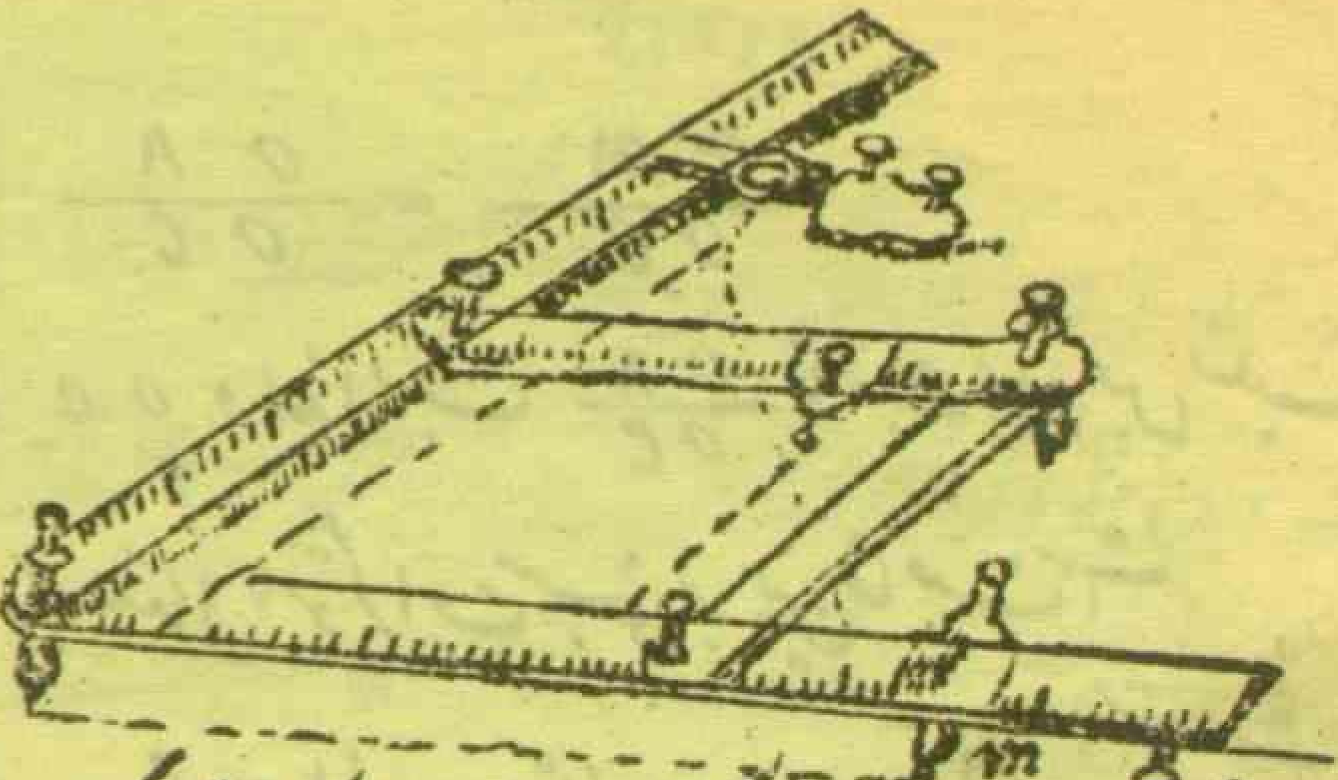
$$\frac{OM}{OC}=\frac{OA}{OC}$$

لیکن دو طول OA و OC و لهذا نسبت $\frac{OA}{OC}$ ثابت میماند پس نسبت $\frac{OM}{OM'}$ تغییر نمیکند و استعمال پانتوگراف مبنی بر همین خاصیت است

۵ ـ فرض کنیم که نقطهٔ O ثابت باشد و بر نقطهٔ M مدادی نصب کرده باشیم اگر نقطهٔ M بر محیط شکلی مانند $P.M.Q$ سیر کند نوک مداد شکل $P'M'Q'$ را که مشابه با PMQ است رسم خواهد نمود (نقطه O را مرکز تشابه گویند) زیرا جمیع مثلثاتیکه از وصل نقطهٔ O بنقاط مختلف $P'M'Q'$ حاصل میشود از قبیل $OP'M'$ بانظایر خود از قبیل OPM متشابهند و دو شکل که از یک عده مثلثات متشابه و متشابه الوضع ترکیب شده اند با نسبت تشابه $\frac{OM}{OM'}$ متشابه خواهند بود

۶ ـ در عمل وضع پانتوگراف با آنچه گفتیم کمی متفاوت است و بعلاوه مشتمل بر بعضی فروع است که باعث سهولت استعمال آن میشود از اینقرار :

نقطهٔ O مرکز محوری است که در مفصلی قرار دارد شکل ۱۱۰ این مفصل از یک طرف بقطعهٔ سرب سنگینی متصل است که محور و بنابراین نقطه O را ثابت نگاه میدارد و از طرف دیگر بکشوی اتصال پیدا میکند که در طول ستون OA میلغزد و هر جا بخواهند بوسیلهٔ پیچ فشار محکم میشود (گاهی بجای قطعهٔ



ش ۱۱۰

سر بی قطعه چوبی دیده میشود که بوسیله پیچ بمیز کار متصل گردیده محور را ثابت نگاه میدارد
طول ستاره ها نیز تغییر نمیکنند ولی مداد و گرسام بدو کشو وصلند که در طول
ستاره ها قابل حرکت و بواسطه پیچ فشار محکم میشوند و بدین وسیله طول OA - OC
را میتوان تغییر داده نسبت تشابه را هر چه بخواهند قرار داد بدون اینکه سه نقطه
O و M و m از یک استقامت خارج شوند

ب – استعمال تشابه اشکال در مساحی و نقشه برداری

۷ – بفرض اینکه زمین مسطح و افقی باشد مقصود از نقشه آن شکلی است مشابه شکل زمین
که نسبت تشابه آن را مقیاس گویند. و بعبارت دیگر مقیاس عبارت است
از نسبت ابعاد نقشه بابعاد واقعی شکل

۸ – مقصود از مساحی تعیین وسعت زمین است بحسب واحد سطح

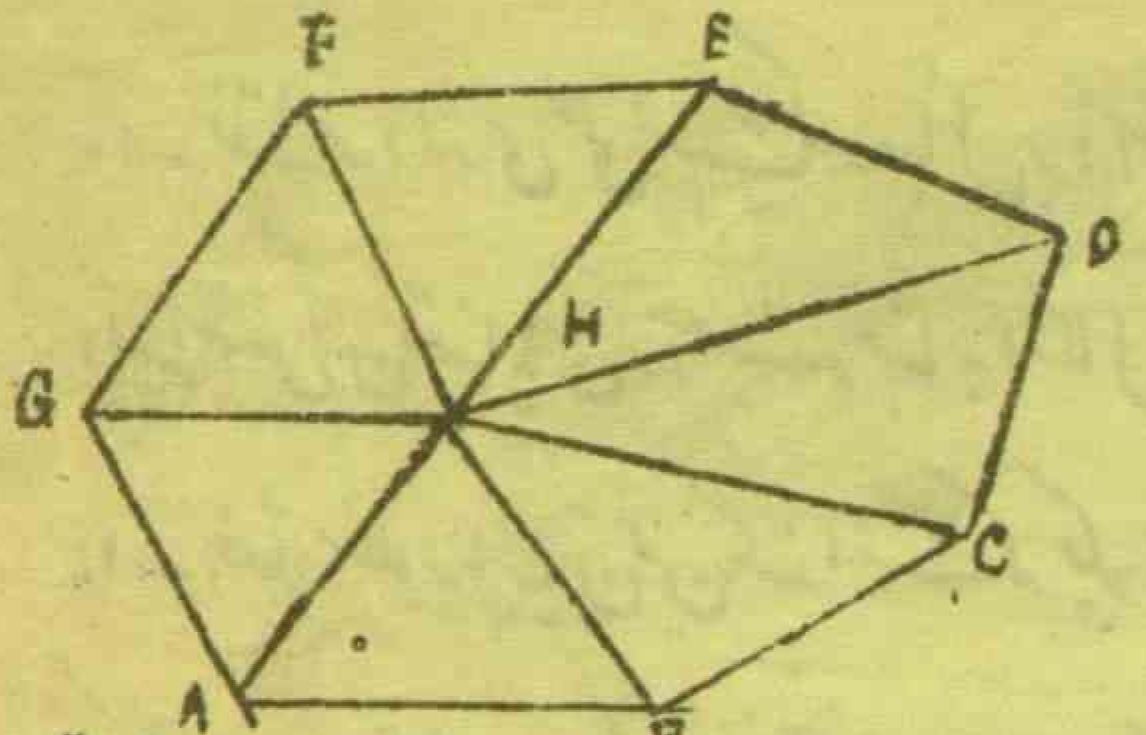
۹ – برداشتن نقشه عبارت است از سنجیدن تمام مقادیری که دانستن
آنها برای تعیین و رسم نقشه لازم باشد

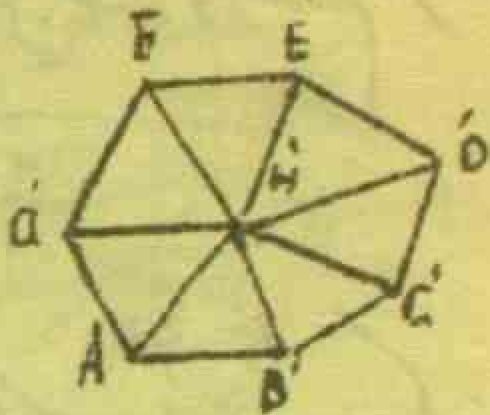
۱۰- نقشه برداری علمی است که وسائل برداشتن نقشه و رسم آنرا تعیین میکند و اساس آن قضایای راجعه بتشابه اشکال است

۱۱- فعلاً منظور ما بیان این نکته است که چگونه بوسیلهٔ سنجیدن یک عده طول ممکنست بعد قضایای مزبوره نقشهٔ زمین را برداشته مساحت آنرا معلوم نمود

۱۲- فرض میکنیم بخواهیم نقشهٔ زمینی را که شکل کثیرالاضلاع ABCD EFG است برداریم بنابراینکه مقیاس $\frac{1}{1000}$ باشد یعنی یک میلی متر روی نقشه نمایش یک متر طول حقیقی فرض شود پس نقطهٔ مانند H در داخل کثیرالاضلاع فرض نموده آنرا برؤس کثیرالاضلاع وصل میکنیم و اضلاع مثلثات HAB و HBC وغیره را بعد زنجیر مساحی که زنجیری است بطول ده متر اندازه میگیریم و هریک را در مقیاس (نسبت تشابه) ۰۰۱ر۰ ضرب میکنیم تا طول تحویلی آنها بدست آید

حال با طولهای تحویلی مثلثات H'A'B' و H'B'C' وغیره را رسم میکنیم تا از ترکیب آنها کثیرالاضلاع A'B'C'D'E'F'G' که نقشه مطلوب باشد حاصل گردد زیرا چنانکه میدانیم هرگاه دو کثیرالاضلاع مرکب باشند از یک عده مثلثات متشابهه متشابه الوضع خود متشابه میشوند





۱۳ - اگر مقصود مساحت کردن ABCDEFG باشد کافی است

که مساحت A'B'C'D'E'F'G' را معلوم نموده در عکس مجذور مقیاس ضرب

کنیم (مساحت شکل اخیر با قسام و انواع ممکنست حتی میتوان این شکل را از کاغذ

بریده وزن آنرا معلوم کنیم و بر وزن یک میلیمتر مربع از همان کاغذ تقسیم نمائیم)

خارج قسمت وسعت زمین است بحسب متر مربع

۱۴ غالباً وقتی مقصود فقط مساحت باشد نقشه را رسم نمیکنند بلکه بعد از برداشتن

نقشه وسعت مثلثات H A B و غیره را از روی اضلاع حساب کرده آنها را

جمع میکنند

۱۵ - در مساحی بیشتر بعوض مثلث ذوزنقهٔ قائم الزاویه بکار میبرند باین طریق

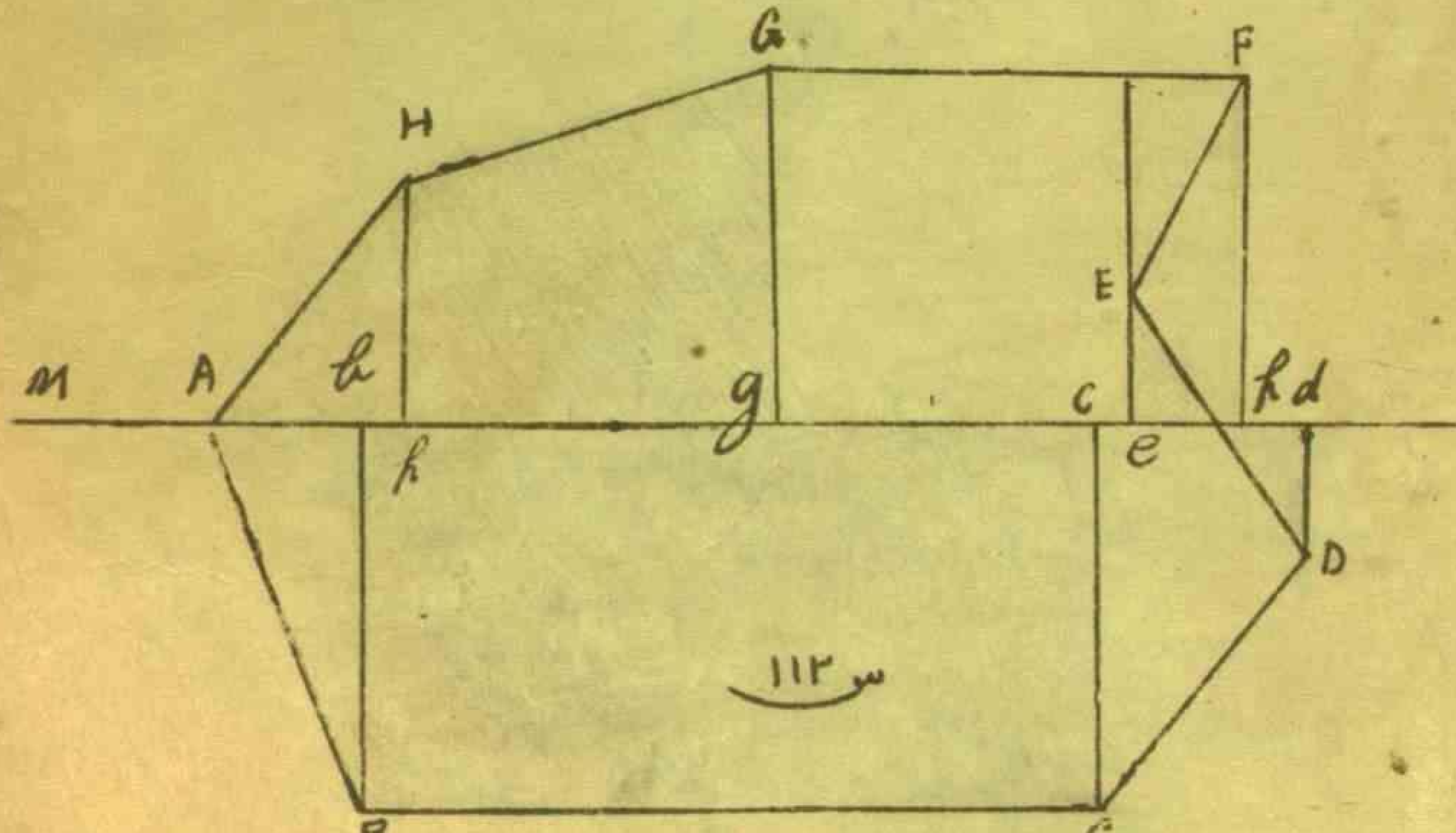
۱۶ - برای مساحت کردن کثیر الاضلاع ABCDEFGH

۱۱۲۳ از رؤس این شکل عمودها بر خط اختیاری mN فرود میآوریم

(اغلب قطر اطول کثیر الاضلاع را بجای mN اختیار میکنند) تا شکل

به ذوزنقه‌ها و مثلثات تجزیه شود و آنها را مساحت کرده بر یکدیگر میافزایند
و اگر ذوزنقه یا مثلثی در خارج شکل واقع باشد آن را منفی اعتبار میکنند
پس مساحت مطلوب چنین است

$$s = ABb + AHh + HGgh + \cdots$$



س ۱۱۲

جدول حروف یونانی

اسم	حرف	اسم	حرف	اسم	حرف	اسم	حرف	اسم	حرف	اسم	حرف
الفا	α	اپسیلون	ε	یتا	ι	نو	ν	ز	ρ	فی	φ
بتا	β	زتا	ζ	کاپا	κ	کسی	ξ	زیگما	σ ς	خی	χ
گاما	γ	اِتا	η	لاندا	λ	اُمیکرن	ο	تاو	τ	پسی	ψ
دلتا	δ	تتا	θ	مو	μ	پی	π	اوپسیلون	υ	اُمگا	ω

کتبه محمد جواد بن ملک الخطاطین الشریفی

در مطبعهٔ (علمی) بطبع رسید

شمسی (۱۳۰۹)

زمین شناسی

برای

کلاسهای ششم علمی وادبی دبیرستانها ودانشسراهای مقدماتی

مطابق برنامهٔ وزارت معارف

تألیف

امین میرهادی

لیسانسیه از دانشسرای عالی و دبیر طبیعیات دبیرستانهای طهران

چاپ دوم

مشتمل بر ۲۵۰ کلیشه و ۸ نقشهٔ الوان

آبان ۱۳۱۵